Fizika za Tehničko veleučilište u Zagrebu

Kinematika i dinamika

Ivica Levanat

Nastavni materijali Tehničkog veleučilišta u Zagrebu
Manualia politechnici studiorum Zagrabiensis

Ivica Levanat, *Fizika za Tehničko veleučilište u Zagrebu - Kinematika i dinamika*,
Zajednički dio programa Fizike za sve odjele Tehničkog veleučilišta u Zagrebu,
Zagreb, 2010

Skraćeni naziv: Fizika za TVZ – Kinematika i dinamika

Ovaj nastavni materijal je recenziran i kategoriziran kao "skripta".

Recenzenti

dr. sc. Nevenko Bilić
znanstveni savjetnik
Institut Ruđer Bošković

dr. sc. Mladen Movre
znanstveni savjetnik
Institut za fiziku

Predgovor

Na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, jednosemestralni kolegiji "Fizika" predaju se na prvoj godini četiriju studija: elektrotehnike, informatike, računarstva i graditeljstva. Ti se kolegiji međusobno razlikuju i po broju sati i po uvrštenim temama.

No, budući da svi imaju zajednički karakter uvodnog upoznavanja sa fizikalnim veličinama i zakonima, u prvom se dijelu svih kolegija na sličan način (uz manje razlike u opsegu) obrađuju uobičajene teme iz kinematike i dinamike, koje čine oko polovicu ili više ukupnoga gradiva. Tek nakon toga pojavljuju se razlike u odabiru tema za pojedine studije, koje su usklađene s drugim sadržajima tih studija.

Ovaj nastavni materijal obuhvaća sve zajedničke teme četiriju studija, u opsegu koji najbliže prati predavanja na elektrotehničkom studiju, gdje se izložene teme i najopširnije obrađuju (te čine oko dvije trećine programa). Studenti koji solidno savladaju ovaj dio gradiva ustanoviti će da je ostatak kolegija "Fizika" lako razumljiv i da se dade brzo naučiti.

Udžbenici koji na prikladnoj razini kvalitetno obrađuju teme iz ovoga teksta nisu rijetkost, čak i ako se ograničimo samo na hrvatsko govorno područje. Međutim, sa stajališta naših studenata, značajan im je nedostatak da su preopširni. Dugogodišnje iskustvo pokazuje da mnogi studenti radije koriste nasumične kraće materijale sa *weba* (koji su najčešće puni pogrešaka) ili, u boljem slučaju, kopije tuđih bilješki s predavanja (često nečitke i nepotpune).

Stoga je ovaj nastavni materijal zamišljen kao neki razuman, kompromisni sažetak predavanja. Opseg mu je upravo dovoljan da obuhvati osnovne pojmove i zakone koji se izlažu na predavanjima, uz nužna tumačenja i opis odnosa među njima. No istovremeno nastoji ostati toliko koncizan da ne premaši mnogostruko duljinu osrednjih studentskih pribilježaka – s nadom da će našim studentima barem nadomjestiti sumnjive materijale koje su dosad koristili, a možda ih i motivirati da posegnu za opširnijim udžbenikom.

Sadržaj

1 Uvod

Formiranju fizike kao znanosti najviše je doprinijelo proučavanje gibanja tijela; a i danas, svaki uvodni tečaj fizike počinje upoznavanjem pojmova iz toga područja jer su potrebni za razumijevanje pojava u drugim granama fizike. Područje se tradicionalno naziva mehanikom, i često formalno dijeli na kinematiku, dinamiku i statiku. Kinematika opisuje *kako* se tijela gibaju, dinamika objašnjava *zašto* se tako gibaju, a statika proučava okolnosti u kojima tijela miruju.

Ovaj tekst je ograničen na jednostavnije koncepte iz kinematike i dinamike krutih tijela. Izlaganje građe uglavnom prati uobičajeni slijed uvodnih tečajeva u visokoškolskom obrazovanju, a matematička razina je primjerena tehničkom studiju.

Zbog notorno neujednačenog predznanja kod studenata prve godine, u ovom uvodnom poglavlju kratko su opisane i neke matematičke operacije koje se koriste u daljnjem izlaganju (a neke će biti opisane prilikom prvog korištenja).

1.1 Fizikalne veličine

Nema osobito pametnih definicija koje bi sadržavale korisne informacije o tome koje veličine ubrajamo u fizikalne velične, odnosno što je područje istraživanja fizike. No, studentima to nije ni potrebno, jer su već u ranijem školovanju upoznali niz fizikalnih veličina, a lako će razumjeti da postoje i mnoge druge veličine koje su s njima povezane, kao i da razvoj fizike proširuje područja istraživanja i uvodi nove fizikalne veličine.

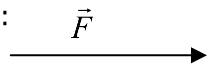
Korisno je, međutim, uočiti da se fizikalne veličine mogu grupirati prema nekim svojim općim svojstvima. Za potrebe ovoga kolegija osobito je važno razlikovati skalare i vektore.

Skalari su veličine koje imaju samo samo iznos, npr. masa (m = 3 kg) ili energija (E = -20 J).

Vektori su veličine koje imaju iznos i smjer, i ponašaju se po pravilima vektorskog računa, npr. brzina $\vec{v}$ ili sila $\vec{F}$. Iznos vektora je pozitivan broj (za razliku od skalara, koji može biti i negativan), npr. $|\vec{v}| \equiv v = 3$ m/s.

U fizici i tehnici uobičajeno je iznos vektora pisati tako da se samo izostavi strelica sa simbola, npr. iznos vektora brzine $\vec{v}$ piše se kao v, jer se po upotrebljenom simbolu (i kontekstu) zna o kojoj se veličini radi (u ovom primjeru o brzini) te da je to vektorska veličina. U matematici isti simbol može biti bilo što, pa se iznos vektora obilježava s $|\vec{v}|$ jer bi samo v moglo označavati neku skalarnu veličinu. Dakako, i u fizici ćemo ponekad koristiti istu oznaku, npr. $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$ za iznos sume dvaju vektora.

Vektore grafički prikazujemo pomoću usmjerenih dužina, primjerice: gdje smjer dužine označava smjer vektora sile, a podrazumijeva se

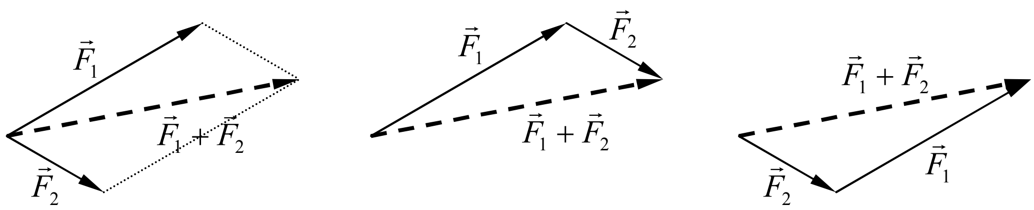


da je duljina te dužine proporcionalna iznosu sile, što može biti i točno specificirano, npr. 1 cm $\widehat{=}$ 1 N (1cm predstavlja 1 N).

Operacije s vektorima

Kao što zbrojiti dvije mase znači izračunati treću masu koja njih dvije može zamijeniti (npr. po učinku na vagu), tako i zbroj dvaju vektora daje treći vektor koji njih može zamijeniti (te se često naziva njihovom rezultantom).

Pravilo vektorskog zbrajanja (Slika 1.1) možda se intuitivno najlakše razumije na primjeru dviju sila ($\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$) zbrojenih pomoću paralelograma (lijeva skica na Slici 1.1).

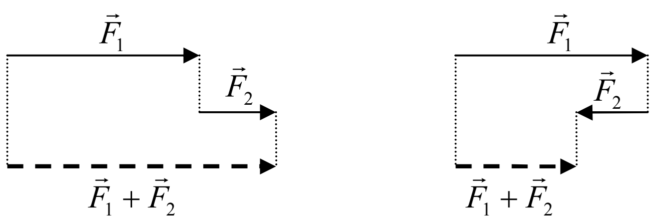


Slika 1.1. Zbrajanje vektora

Smjer rezultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (koja može zamijeniti učinak tih dviju sila) je negde između njihovih smjerova, i to kako bismo i očekivali bliže većoj sili $\vec{F}_1$, a iznos je – u prikazanom primjeru – veći od jedne i druge ali manji od zbroja njihovih iznosa. Ostatak Slike 1.1 pokazuje kako se isti rezultat dobija nadovezivanjem vektora, što je osobito korisno kod zbrajanja više od dva vektora.

Kod zbrajanja vektora (i drugih operacija s njima) možemo usmjerene dužine, koje ih grafički predstavljaju, po volji translatirati (premještati kroz prostor tako da sačuvaju iznos i smjer), što je očito i učinjeno na Slici 1.1. No, u nekim slučajevima (npr. upravo za sile), mora se usto dodatno razmotriti i položaj vektora u prostoru (za učinak sile npr. položaj hvatišta, ili samo pravca na kojem sila djeluje ako je tijelo kruto).

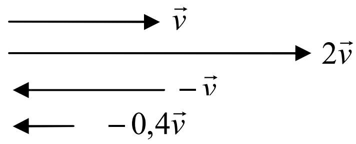
U specijalnom slučaju kada su vektorske veličine paralelne, iznos njihova zbroja jednak je zbroju njihovih iznosa ako su u istom smjeru, ili razlici iznosa ako su u suprotnim smjerovima, kako se vidi sa Slike 1.2.



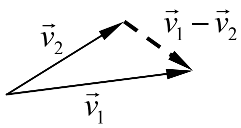
Slika 1.2. Zbrajanje paralelnih vektora

U ostalim slučajevima, iznos zbroja i njegov smjer (kut prema jednom od pribrojnika) može se sa skice kao što je Slika 1.1 približno izmjeriti, ili izračunati pomoću trigonometrije (kosinusov poučak).

Važno je uočiti komutativno svojstvo zbrajanja vektora, tj. da je $\vec{F}_2+\vec{F}_1=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, koje se jasno razabire iz prethodnih skica. Neke fizikalne veličine kojima se, osim iznosa, može pridružiti i smjer (npr. kut zakreta nekog tijela), ne zadovoljavaju to svojstvo, pa nisu vektori.



<u>Množenje vektora sa skalarom</u> (brojem) je jednostavan postupak koji se intuitivno razumije na temelju zbrajanja vektora ($\vec{v}+\vec{v}=2\vec{v}$). Množi se samo iznos vektora s apsolutnom vrijednošću skalara, a rezultat je vektor istoga smjera ako je skalar pozitivan, odnosno suprotnog smjera ako je skalar negativan.

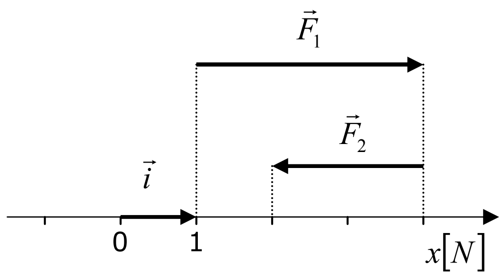


<u>Oduzeti</u> vektor $\vec{v}_2$ od $\vec{v}_1$ isto je što i dodati suprotni, tj. $\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_1+(-\vec{v}_2)$. No, često je zgodnije prikazati razliku kao spojnicu vrhova usmjerenih dužina (na skici desno), što se dokazuje iz očigledne jednakosti $\vec{v}_2+(\vec{v}_1-\vec{v}_2)=\vec{v}_1$.

<u>*Komponente vektora u koordinatnom sustavu*</u>

Duž osi pravokutnog Kartezijeva sustava x, y, z (na kojima su prikazane mjerne jedinice za promatranu vektorsku veličinu, npr. njutni, N, za silu) uvedemo jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (dakle, $|\vec{i}|$ = $|\vec{j}|$ = $|\vec{k}|$ = 1).

Ako je vektor paralelan s nekom osi koordinatnog sustava, može ga se zapisati pomoću jednog broja. Npr. sile $\vec{F}_1=3\vec{i}$ i $\vec{F}_2=-2\vec{i}$ na Slici 1.3 mogu se zapisati pomoću brojeva 3 i -2 koji množe jedinični vektor $\vec{i}$. Te brojeve nazivamo *skalarnim komponentama* promatranih sila na osi x, i bilježimo kao $F_{1x}=3$ N, odnosno $F_{2x}=-2$ N.[1]



Slika 1.3. $\vec{F}_1=3\vec{i}$, $\vec{F}_2=-2\vec{i}$

Uočite izvjesnu nedosljednost u pisanju mjernih jedinica, koja je uobičajena: kada se komponenta piše uz jedinični vektor, obično se mjerna jedinica izostavlja radi bolje preglednosti, npr. $\vec{F}_1=F_{1x}\vec{i}=3\vec{i}$ (samo $3\vec{i}$ umjesto $3\,\mathrm{N}\,\vec{i}$).

Ako vektor nije paralelan s nekom osi, rastavljamo ga na *vektorske* komponente koje su paralelne s koordinatnim osima, npr. $\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y$ na lijevoj strani Slike 1.4 (a ako vektor izlazi iz ravnine x, y dodali bismo još i vektorsku komponentu $\vec{F}_z$).

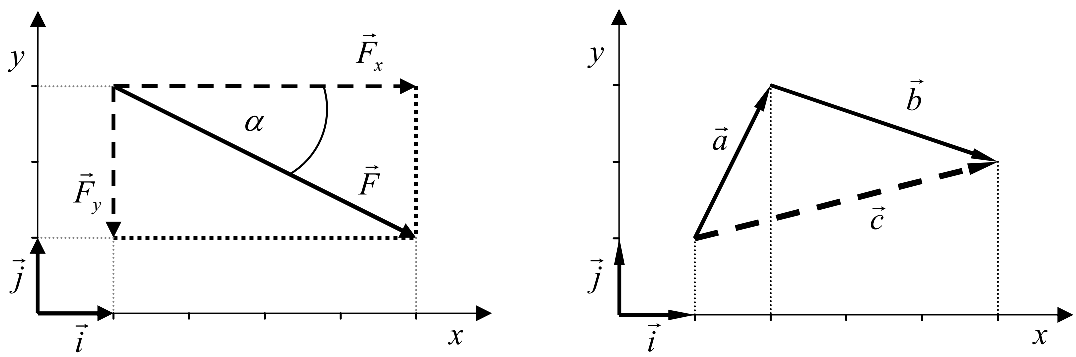
[1] Ostale komponente vektora u ovom primjeru jednake su nuli, jer su sile okomite na osi *y* i *z*.

Tada se svaka vektorska komponenta može zapisati pomoću jediničnog vektora, odnosno prikazati pomoću skalarne komponente, na onoj osi s kojom je paralelna (isti postupak kao na Slici 1.3).

U primjeru sa Slike 1.4 imamo $\vec{F}_x = 4\vec{i}$ te $\vec{F}_y = -2\vec{j}$, pa silu $\vec{F}$ možemo zapisati kao $\boxed{\vec{F} = 4\vec{i} - 2\vec{j}}$. Njezine su skalarne komponente F_x =4N, F_y =-2N, F_z =0.

Često je zgodno vektor zapisati kao uređeni niz skalarnih komponenata (što znači prvo *x*-komponenta, pa *y*, pa *z*), ovako: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, što za silu sa Slike 1.4 konkretno znači $\boxed{\vec{F} = (4\text{N}, -2\text{N}, 0)}$. Time se izbjegava nepotrebno pisanje jediničnih vektora koji se podrazumijevaju.

Slika 1.4. Vektrori u ravnini



Iz navedenoga vidimo da se vektor može opisati pomoću tri broja (skalara). Ta se tvrdnja ne odnosi samo na opis pomoću tri skalarne komponente, nego je posve općenita:[2] silu $\vec{F}$ možemo jednako dobro opisati pomoću njezinog iznosa i dva kuta prema koordinatnim osima (kut prema trećoj osi može se izračunati iz ta dva), u ovom primjeru pomoću naznačenog kuta α prema osi x, i kuta od 90^0 prema osi z. No kad je iz konteksta jasno da svi promatrani vektori leže u istoj ravnini (npr. ravnini x, y), nema potrebe navoditi sve tri komponente (odnosno oba kuta), pa se vektori opisuju samo pomoću dva broja.

Veza između zapisa vektora pomoću skalarnih komponenata, i zapisa pomoću iznosa i smjera, za vektore u ravnini lako se razabire sa skice na kojoj na kojoj je vektor prikazan.[3] U primjeru na lijevoj strani Slike 1.4 vidimo da je:[4]

$$F_x = F\cos\alpha\,,\quad F_y = -F\sin\alpha\;;\qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,,\quad \mathrm{tg}\,\alpha = |F_y / F_x|\;.$$

---

[2] Dakako, za vektore u trodimenzionalnom prostoru.

[3] Nakon minimalnog iskustva, koje će studenti steći na vježbama, komponente se lako zamisle i bez crtanja.

[4] U fizici i tehnici često koristimo neorijentirane kuteve manje od 90^0, kao na ovoj Slici. Tada predznake komponenti, te izbor između sinusa i kosinusa određujemo sa skice.

Kada se vektori prikažu pomoću skalarnih komponenta, računske operacije s vektorima svode se na računske operacije s tim skalarima. Na desnoj strani Slike 1.4 to je ilustrirarano na primjeru zbrajanja. Nije, dakle, potrebno crtati trokut ili paralelogram da bismo odredili zbroj $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, nego samo treba zbrojiti skalarne komponente: $c_x = a_x + b_x$ te $c_y = a_y + b_y$, što se lako provjeri sa Slike na kojoj se vidi da je $\vec{c} =$ (4,1), $\vec{a} =$ (1,2) i $\vec{b} =$ (3,-1).

Tenzori. U fizici se koriste i kompliciranije veličine od vektora, tj. veličine koje imaju više komponenata. Najjednostavnije od njih, koje nazivamo tenzorima drugoga reda, imaju u trodimenzionalnom prostoru 9 komponenata (uočite da je $9 = 3^2$), a koriste se i tenzori viših redova (3^n komponenata). U tome kontekstu skalare se može smatrati tenzorima nultog reda jer imaju $3^0 = 1$ komponentu, a vektore tenzorima prvog reda jer imaju $3^1 = 3$ komponente.

1.2 Mjerne jedinice – SI sustav

Mjerna jedinica je neki dogovoreni, proizvoljno odabrani, iznos neke fizikalne veličine koji služi za mjerenje te veličine.

Na primjer, jedinica za duljinu metar (m), bila je izvorno definirana (proizvoljno odabrana) kao desetmilijunti dio udaljenosti od sjevernog pola do ekvatora. (Danas je definirana kao udaljenost koju svjetlost u vakuumu pređe za 1/299 792 458 sekundi, gdje je $c =$ 299 792 458 m/s brzina svjetlosti u vakuumu.)

Naziv	**Simbol**	**Fizikalna veličina**
metar	**m**	Duljina
kilogram	**kg**	Masa
sekunda	**s**	Vrijeme
amper	**A**	Jakost električne struje
kelvin	**K**	Temperatura
mol	**mol**	Količina (množina) tvari
kandela	**cd**	Jakost svjetlosti

Tablica 1.1. Temeljne SI jedinice

U ranijim razdobljima koristio se veći broj različitih jedinica za istu fizikalnu veličinu. Štoviše, te su jedinice u različitim područjima primjene bile grupirane u različite sustave. Danas je većina zemalja (uključujući Hrvatsku) kao zakonsku obavezu prihvatila korištenje međunarodnog sustava jedinica, tzv. SI sustava (kratica francuskog naziva ***S****ystème* ***I****nternational*).

SI sustav polazi od sedam temeljnih jedinica (Tablica 1.1) za odabrane fizikalne veličine, iz kojih se izvode jedinice za sve druge veličine na temelju njihovih definicija ili fizikalnih zakona. Neke se izvedene SI jedinice pišu u obliku koji razotkriva njihovo porijeklo, npr. metar u sekundi (m/s) za brzinu, dok su za druge usvojeni posebni nazivi, na primjer, jedinica za silu njutn (N) je skraćenica za kgm/s^2.

Znatno veći ili manji iznosi od SI jedinice obično se pišu pomoću eksponencijalnog zapisa u bazi 10, ili pomoću prefiksa uz jedinicu, npr. F = 3,821·10^8 N = 382,1 MN ili r = 1, 53·10^{-8} m = 15,3 nm.[5] Najčešće korišteni dekadski prefiksi navedeni su u Tablici 1.2.

deka-	da	10^1	deci-	d	10^{-1}
hekto-	h	10^2	centi-	c	10^{-2}
kilo-	k	10^3	mili-	m	10^{-3}
mega-	M	10^6	mikro-	μ	10^{-6}
giga-	G	10^9	nano-	n	10^{-9}
tera-	T	10^{12}	piko-	p	10^{-12}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}

Tablica 1.2. Najčešći prefiksi uz SI jedinice

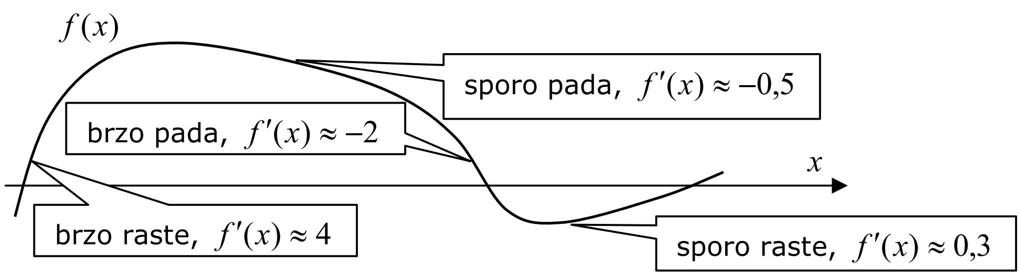
Povijest SI jedinica i njihove definicije opisane su u mnogim udžbenicima, uključujući i literaturu citiranu u ovoj skripti. Precizne i dobro ažurirane definicije mogu se naći i u Wikipediji, http://en.wikipedia.org/wiki/SI_base_unit (hrvatska verzija u vrijeme pisanja ovoga teksta daleko zaostaje za engleskom).

Uz SI jedinice, dopušteno je korištenje i nekih drugih uobičajenih jedinica, kao što su sat (h), elektronvolt (eV) itd.

1.3 Osnovni pojmovi diferencijalnog računa

Točno definiranje čak i najelementarnijih veličina u mehanici, ili opisivanje odnosa među njima, nije moguće bez korištenja derivacija i integrala.

Derivacija opisuje kako se brzo mijenja neka funkcija (pa deriviranjem funkcije, npr. $f(x)$, opet dobijemo funkciju, npr. $f'(x)$). Tamo gdje je derivacija jednaka 1, funkcija raste tako da je krivulja na donjoj skici nagnuta pod 45^0 prema osi x; tamo gdje je derivacija veća i nagib je strmiji, pa kažemo da funkcija brzo raste; na sličan način, negativne vrijednosti derivacije opisuju kako brzo funkcija pada.



---

[5] Prilikom pisanja rezultata mjerenja ili računa podrazumijeva se da su sve navedene znamenke pouzdane (točne) osim možda posljednje, koja može biti procijenjena (ako nije eksplicitno navedena nepouzdanost, tj. moguća pogreška).

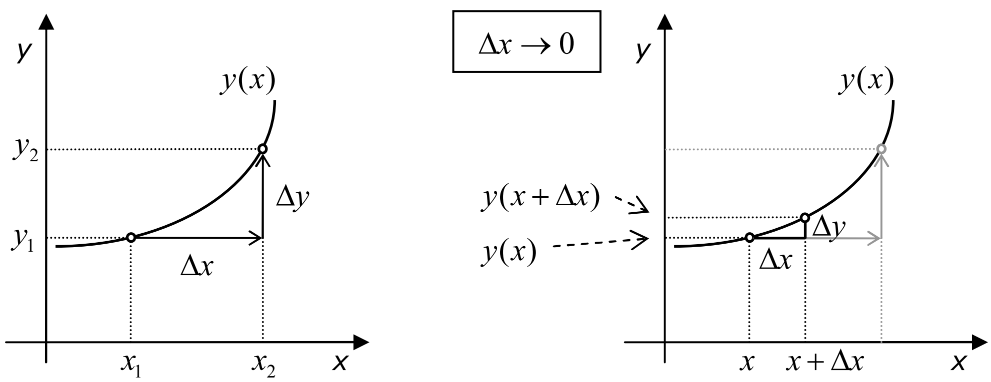
Svakodnevna mjerenja obično ne daju više od 3 pouzdane znamenke. Naravno da ni rezultati računa s takvim brojevima ne mogu imati više pouzdanih znamenki, pa ih nećemo ni pisati (bez obzira na to koliko znamenki "kalkulator pokazuje").

Umjesto apstraktne funkcije $f(x)$, u fizici ćemo promatrati konkretne fizikalne veličine kao funkcije nezavisnih varijabli (koje su također fizikalne veličine, najčešće vrijeme t ili položaj zadan koordinatama). Npr. $v(t)$ je iznos brzine kao funkcija vremena, $F(x)$ je iznos sile kao funkcija koordinate x, dok je $x(t)$ koordinata kao funkcija vremena. Često se iz konteksta zna koja je nezavisna varijabla, pa se ona i ne navodi, nego samo naziv funkcije, npr. v, F, x. A deriviranjem jedne fizikalne veličine u pravilu se dobije neka druga fizikalna veličina, koja onda ima i drugačiji naziv (npr. derivacija brzine po vremenu je ubrzanje).

Opis deriviranja nastavljamo koristeći uobičajene apstraktne matematičke oznake, i još ćemo (kako su studenti navikli) umjesto $f(x)$ pisati $y(x)$ ili, kraće, samo y. Derivacija funkcije $y(x)$ po njezinoj varijabli x označava se kao $y'(x)$ ili kao $\frac{dy}{dx}$ (izrazi u brojniku i nazivniku su *diferencijali*, a čita se: "de y" po "de x").[6] Mi ćemo uglavnom koristiti ovu drugu oznaku. Bez obzira na oznake, derivacija se definira kao *limes (*tj. *granična vrijednost) omjera Δy kroz Δx kada Δx teži prema nuli*:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Neka u x_1 funkcija ima vrijednost $y_1 = y(x_1)$, slično u x_2 (Slika 1.5). Pri promjeni nezavisne varijable za $\Delta x = x_2 - x_1$, funkcija se promjeni za $\Delta y = y_2 - y_1$.[7] Omjer promjena $\Delta y / \Delta x$ pokazuje *prosječnu brzinu promjene* funkcije na intervalu Δx.[8]



Slika 1.5. Definiranje derivacije

Naime, unutar intervala, na lijevoj strani Slike 1.5, očito se mijenja brzina promjene funkcije: u početku funkcija raste sporije, a potom strmije. Zato ćemo smanjivati interval Δx, da funkcija "ne stigne" promijeniti brzinu rasta (lijeva strana Slike, početak graničnog procesa $\Delta x \to 0$). Pritom je zgodno početak intervala Δx obilježiti sa x, a njegov kraj sa $x + \Delta x$, pa će promjena funkcije na tome

---

[6] Sam *dy* je "diferencijal od y", a *dx* je "diferencijal od x"; a derivacija je omjer diferencijala.

[7] Na lijevoj strani Slike 1.5 smjer promjene je označen strelicama: obadvije su pozitivne, jer su strelice u smjeru porasta varijabli.

[8] Koliko se poveća ili umanji *y* dok *x* naraste za jednu jedinicu.

intervalu biti $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$. Pokažimo kako se granični proces ("uzimanje" limesa) provodi na nekoj jednostavnoj funkciji, npr. $y(x) = x^2$. Za nju je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \stackrel{?}{=} 2x + \Delta x \,.$$

Čemu upitnik iznad posljednjeg znaka jednakosti? Ako bismo iznos intervala htjeli "do kraja" umanjiti, stavili bismo $\Delta x = 0$. No, tada (i samo tada) ne vrijedi "upitni" znak jednakosti, jer nismo smjeli kratiti s nulom. Uostalom, na intervalu nula nema ni promjene funkcije, pa nema smisla ni govoriti o brzini promjene.

Zato je uveden pojam limesa, odnosno graničnog procesa. Kažemo da Δx "teži prema nuli" i promatramo kojoj vrijednosti pri tome "teži" izraz koji sadrži Δx. Ta se vrijednost zove limes (granična vrijednost) promatranog izraza.

Gornji razlomak postaje "praktično jednak" izrazu $2x$ (tj. razlikuje se od njega u po volji dalekoj decimali) ako uzmemo dovoljno mali Δx (ali ipak različit od nule, da možemo dijeliti). Zato *limes* toga razlomka, kada Δx teži nuli, iznosi $2x$. Dakle:

za $y = x^2$ imamo $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$, kraće: $\dfrac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

Sa stajališta praktične manipulacije to znači: kad ispred izraza napišemo $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, onda graničnu vrijednost dobijamo tako da doista uvrstimo $\Delta x = 0$ (ako to daje neki razuman rezultat, što je uvijek slučaj kad prije uspijemo pokratiti Δx iz nazivnika).

Opisanim postupkom dobiju se razna pravila deriviranja (koja se uče u Matematici 1). Ovdje navodimo samo dva (bez dokaza) koja ćemo odmah koristiti:

Derivacija produkta funkcija

$$\boxed{\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}}$$

Derivacija potencije

$$\boxed{\frac{d(x^n)}{dx} = n\; x^{n-1}}$$

Imajući na umu da je derivacija konstante nula (zato što nema promjene), iz gornjih pravila lako vidimo da je derivacija od npr. $3x^5$ jednaka $3 \cdot 5x^4$, jer u derivaciji produkta broja 3 s potencijom „krepa“ prvi član (gdje se derivira konstanta), pa ostaje samo član u kojemu konstanta množi derivaciju potencije.

Za deriviranje polinoma, treba još samo primijeniti pravilo da sumu deriviramo član po član (iz intuitivno jasne tvrdnje: limes sume jednak je sumi limesa). Na primjer:

$$u(x) = 4x^5 - 5x^3 + x^2 + 3x - 7$$

$\dfrac{du}{dx} = 20x^4 - 15x^2 + 2x + 3 = v(x)$ (derivacija od $x \equiv x^1$ je $1x^0 = 1$)

Dobivenu derivaciju funkcije $u(x)$ označili smo kao funkciju $v(x)$, da bismo lakše raspravili pojam *integriranja* koji uvodimo na primjeru tih dviju funkcija. Ako je funkcija $v(x)$ derivacija funkcije $u(x)$, onda je $u(x)$ *antiderivacija* ili *neodređeni integral* funkcije $v(x)$. Mi ćemo koristiti ovaj drugi izraz.

Neodređeni integral funkcije $v(x)$ obilježava se $\boxed{\int v(x)dx}$, i računa ovako:

$$\int v(x)dx = \int (20x^4 - 15x^2 + 2x + 3)dx = 20\int x^4 dx - 15\int x^2 dx + 2\int xdx + 3\int dx \, .$$

Razlog za ovakvu oznaku integriranja razjasnit će se kod pojma određenog integrala; sada je važno uočiti da se oznaka sastoji od "gliste" na početku i diferencijala nezavisne varijable na kraju, a funkcija koju integriramo umeće se između njih. Potom se primjenjuju ona dva ista pravila kao kod deriviranja (tzv. linearnost operacije): integrira se član po član, a konstanta (broj) koja množi funkciju (potenciju) se ne integrira nego samo prepiše ("izvadi" se ispred integrala). Nakon toga treba samo obaviti integriranje potencija, kao obrnuti postupak od deriviranja, dakle:

$\boxed{\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C}$, uz uvjet[9] $n \neq -1$. Tako za gornji integral dobijamo:[10]

$$\int v(x)dx = 4x^5 - 5x^3 + x^2 + 3x + C \, ,$$

što je skoro jednako polaznoj funkciji $u(x)$ od koje smo $v(x)$ dobili deriviranjem, samo završava sa "C" umjesto sa "-7". Naime, konstanta "-7" nepovratno je krepala prilikom deriviranja, ne ostavivši nikakvu informaciju o tome kolika je bila. Zato svakom neodređenom integralu dodajemo na kraju neodređenu aditivnu konstantu C (koja, uostalom, može biti i nula, ali to ne znamo). Ipak, u daljnoj obradi integrala konstanta C često se dokine ili dobije neko konkretnije značenje, kako ćemo vidjeti kasnije.

Mada je ovdje pojam neodređenog integrala uveden pomoću derivacije (kao antideriviranje), spomenimo da se on može uvesti i posve neovisnom definicijom (dakako, pomoću limesa), iz koje se mogu izvesti ista pravila računanja.

Za razliku od neodređenog integrala, koji je funkcija, *određeni integral* je samo broj. Iako na prvi pogled neće izgledati tako, zajednička riječ "integral" govori da su blisko povezani.

Pojam određenog integrala najlakše je razumjeti na primjeru: recimo da konstantna sila iznosa F vuče neko tijelo u smjeru svojega djelovanja, npr. duž koordinatne osi *x*. Kako znamo iz srednje škole, ona će vršiti rad=sila×put. Konkretno, dok

---

[9] Ne samo zato što bi nazivnik bio nula, nego se x^{-1} ne može dobiti deriviranjem potencije (x^0 je konstatnta); x^{-1} dobiva se deriviranjem funkcije ln*x*.

[10] Početnike često zbunjuje posljednji i najjednostavniji integral iz sume, $\int dx$. Pod integralom je zapravo 1, što se ne piše, ali je jednako x^0, pa će rezultat integriranja biti *x*. Ili, vizuelno, "glista" jede "d" kad su nasamo, pa ostaje samo *x*.

odvuče tijelo iz položaja $x_1 = 1$m do položaja $x_2 = 4$m (put iznosi $\Delta x = x_2 - x_1 = 3$m), sila od 2N izvršit će rad $W = F\Delta x = 2$N·3m=6J.

No, što ako se iznos sile na tome putu mijenja, npr. opisan je funkcijom $F(x)$? Ne znamo koju bismo vrijednost sile trebali uvrstiti u formulu sila×put. Ipak, približno numeričko rješenje je očigledno: podijelimo ta 3 metra puta na male komadiće, npr. milimetre, i nazovemo ih redom $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots \Delta x_{3000}$ (opći naziv pojedinog komadića Δx_i). Sila se na pojedinom komadiću Δx_i ne može puno promjeniti (možda tek u nekoj decimali koju ne želimo ni pisati), pa uzmemo bilo koju njezinu vrijednost F_i iz pojedinog intervala Δx_i. Ukupni rad je približno jednak zbroju produkata $W \approx \sum F_i \Delta x_i = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + \ldots + F_{3000} \Delta x_{3000}$. Dakako, možemo računati još točnije: svaki gornji komadić Δx_i dodatno podijelimo, npr. na desetinke, i sa svake desetinke uzmemo neku vrijednost sile, pa sad izračunamo sumu novih produkata $F_i \Delta x_i$ (kojih ima 30 000). Postupak usitnjavanja puta, te zbrajanja sve većeg broja produkata možemo nastaviti dok uzastopni rezultati ne postanu međusobno jednaki u željenom broju decimala: to se zove *numeričko integriranje*.

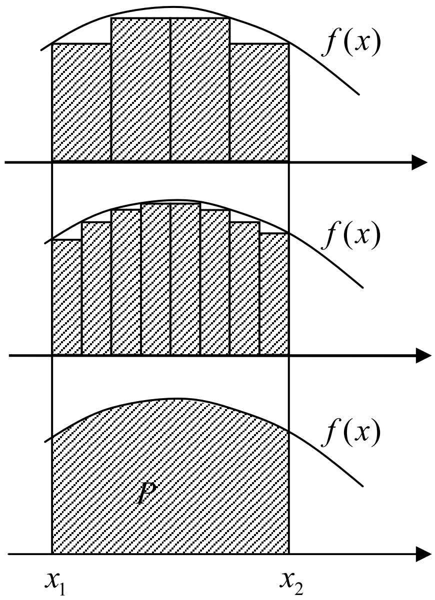
U mislima, međutim, možemo pretpostaviti da opisano usitnjavanje nastavljamo u nedogled: svaki komadić Δx_i "teži" prema nuli, a broj produkata postaje beskonačan (veći od bilo kojeg broja). Naravno da ne možemo stvarno pisati $\Delta x_i = 0$ (jer bi onda i sve zajedno bilo nula), niti bismo ikad stigli stvarno zbrojiti beskonačno mnogo pribrojnika, nego je opet riječ o graničnom prijelazu. Iz opisanog postupka numeričkog integriranja, intuitivno je jasno da svaka sitnija razdioba daje rezultat sa sve većim brojem točnih znamenki, pa se on po volji približava nekoj granici (limesu) sa svim točnim znamenkama, koja se zove *određeni integral* i obilježava ovako:

$$\boxed{W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum F_i \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F dx}\ .$$

Ovdje se vidi da je znak integrala ("glista") nastao kao stilizirani rastegnuti znak sume; a Δx_i pretvorio se u diferencijal dx (kojega je zgodno zamišljati kao "beskonačno mali" interval Δx).[11] I funkcija $F(x)$ i interval izgubili su indekse "i" (jer ih je "beskonačno", pa ih ne možemo prebrojiti), a umjesto toga navodi se *donja granica* (ispod integrala) i *gornja granica* (iznad integrala) ukupnog intervala Δx po kojemu se integrira.

---

[11] U fizici i tehnici, slično izvornim predodžbama pionira diferencijalnog računa, često diferencijale intuitivno zamišljamo kao "beskonačno male" intervale. Takav se pristup može i rigorozno opravdati, te pokazati da je ekvivalentan standardnoj matematičkoj analizi, npr. Robinson, A., *Non-standard analysis* (Revised edition ed.). Princeton University Press, 1996.



Naravno da smo cijelo razmatranje mogli provesti za bilo koju funkciju $f(x)$ (a ne baš za silu) te da pojam integrala nije ograničen na pojam rada (iako ćemo ga tu najviše koristiti). Štoviše, uobičajeno je da se pojam određenog integrala ilustrira na primjeru određivanja površine ispod dijela krivulje $f(x)$ od x_1 do x_2 (skica desno). Tu površinu možemo aproksimirati pomoću niza pravokutnika koji npr. diraju krivulju odozdo, a lako se vidi da aproksimacija postaje sve bolja kada sve više usitnjavamo osnovice Δx_i tih pravokutnika (te se njihov broj povećava). Visine pravokutnika mogu biti vrijednosti funkcije $f_i(x)$ bilo gdje na pojedinom intervalu (ovdje na početku ili na kraju intervala). Granična vrijednost procesa je određeni integral koji možemo zamišljati kao zbroj tako uskih pravokutnika da su postali vertikalne crte od osi *x* do krivulje:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\; dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f_i(x) \Delta x_i \; .$$

No, osobito je korisno svojstvo određenog integrala to da se on vrlo jednostavno može izračunati iz neodređenog integrala (zbog čega njihovi nazivi i sadrže zajedničku riječ "integral"). Dokaz te tvrdnje prepuštamo kolegiju Matemetika 2, a ovdje samo pokazujemo kako se to radi. Stvar se najlakše shvati na primjeru:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 2{,}33 \, .$$

U prvom koraku izračunamo neodređeni integral podintegralne funkcije, ovdje x^2 (kao da na "glisti" nema donje i gornje granice). Rezultat $x^3/3$ upišemo u uglatu zagradu (bez aditivne konstante C, jer bi se i tako oduzela u narednom koraku). Uz desnu stranu zagrade[12] prepišemo granice integriranja. U narednom koraku, u neodređeni integral iz zagrade uvrstimo najprije gornju granicu, pa od toga oduzmemo neodređeni integral u koji smo uvrstili donju granicu. To je sve.

Spomenimo na kraju da nije moguće svaku funkciju derivirati ili integrirati, mada često samo u nekom dijelu njihova područja definicije. To znači da tu ne postoje granične vrijednosti (limesi) pomoću kojih su te operacije definirane. A čak i kada derivacije ili integrali postoje, za mnoge funkcije ne mogu se izračunati pomoću analitičkih pravila ("formula"), nego samo numerički (približno).

---

[12] Alternativno, može se umjesto zagrade pisati samo vertikalna crta na mjestu desne zagrade.

2 Opis gibanja točke

2.1 Kako se opisuje gibanje

Gibanje točke u cijelosti je opisano (u nekom referentnom sustavu) ako u svakom trenutku znademo njezine koordinate.

Potpuni opis gibanja tijela u načelu zahtijeva da se opiše gibanje svake njegove točke. No, za kruto tijelo dovoljno je pomoću koordinata opisati gibanje samo jedne njegove točke; ostale točke mogu samo rotirati oko nje, a rotacija se dade opisati za sve točke zajedno. Najjednostavnije je analizirati gibanje tijela tako da se opiše gibanje njegovog centra masa, plus rotacija tijela oko njega.

Točka koja se zove centar masa (za praktične potrebe na Zemlji se podudara s težištem tijela) i rotacija tijela opisani su u kasnijim poglavljima. U ovom poglavlju opisuje se samo gibanje točke.

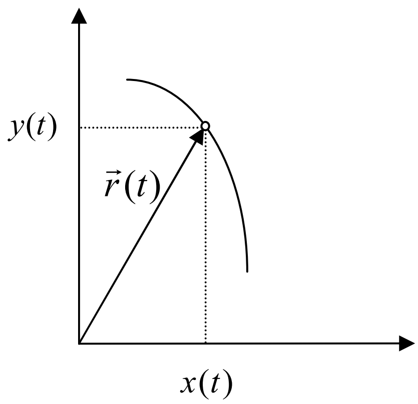
2.2 Vektor položaja

Gibanje točke možemo opisati tako da u nekom referentnom sustavu, npr. u Kartezijevom koordinatnom sustavu, zadamo njezine koordinate kao funkcije vremena: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Te Kartezijeve koordinate možemo smatrati komponentama usmjerene dužine $\vec{r}(t)$, za koju se koristi naziv *vektor položaja* ili *radij-vektor* točke.

Slika 2.1. Vektor položaja točke

$\vec{r} = (x, y, z)$

(Na slici je prikazano samo gibanje u ravnini *xy*).



Vektor položaja je, dakako, i sam funkcija vremena: to je usmjerena dužina kojoj je početak u ishodištu koordinatnog sustava, a završetak ("strelica") prati točku na njezinom gibanju po promatranoj putanji.

2.3 Brzina

Brzina je vektorska funkcija vremena. Njezin smjer je smjer gibanja točke, pa leži na tangenti na putanju. Njezin iznos opisuje kako brzo točka prelazi put.

Uobičajena definicija brzine iz osnovne škole – "pređeni put u jedinici vremena" – vrlo nepotpuno opisuje brzinu: to je samo broj koji je jednak iznosu prosječne brzine u toj jedinici vremena. Ako se iznos brzine ne mijenja (jednoliko gibanje), on se doista računa tako da se put podijeli s vremenom u kojemu je prijeđen. Ako se pak mijenja, takvim dijeljenjem dobije se iznos prosječne brzine u promatranom vremenskom intervalu.

Općenita i točna definicija brzine temelji se na pojmu derivacije, budući da samo derivacija neke funkcije detaljno opisuje kako se brzo mijenja ta funkcija.

Kod računanja iznosa promjenjljive brzine jasno je da će prosječna brzina u nekom malom vremenskom intervalu utoliko bolje opisivati trenutnu brzinu ukoliko je taj interval kraći. Stoga je očigledno da treba promatrati graničnu vrijednost (limes) omjera puta i vremena

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdje je Δs komadić puta pređen u vremenskom intervalu Δt između trenutka t i trenutka $t + \Delta t$. Ta granična vrijednost (za sve kraće vremenske intervale nakon trenutka t) definira iznos brzine u trenutku t:

Definicija iznosa brzine:

Iznos brzine je derivacija puta po vremenu: $v = \frac{ds}{dt}$.

Dok iznos brzine opisuje kako brzo točka prelazi put, brzina kao vektorska veličina, koja ima i iznos i smjer, opisuje kako se brzo mijenja položaj točke. Stoga se ona definira pomoću vektora položaja:

Definicija vektora brzine:

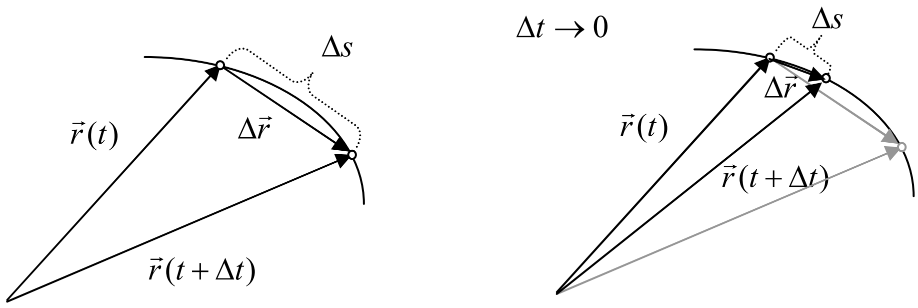
Brzina je derivacija vektora položaja po vremenu: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Ta vektorska jednadžba zamjenjuje tri skalarne jednadžbe, koje na analogan način povezuju skalarne komponente promatranih vektora. U Kartezijevim koordinatama:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Detaljnije obrazloženje definicije vektora brzine, kao i usklađenost s definicijom iznosa brzine, lako se razabiru iz Slike 2.2. U trenutku t točka prolazi kroz položaj $\vec{r}(t)$, a nakon vremenskog intervala Δt kroz položaj $\vec{r}(t+\Delta t)$. U tom je vremenskom intervalu prešla put prikazan lukom Δs, a promjenu njezina položaja prikazuje vektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ koji je tetiva tome luku (lijeva strana Slike

2.2). Prema definiciji, vektor brzine je granična vrijednost $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (naznaka graničnog prijelaza $\Delta t \to 0$ prikazana je na desnoj strani skice).



Slika 2.2. Uz definiciju brzine

Iz skice se vidi da u limesu $\Delta t \to 0$ vektor $\Delta \vec{r}$ postaje sve manja tetiva sve manjeg luka, sve više se priljubljuje uz luk, pa njegov smjer teži tangenti na putanju u položaju $\vec{r}(t)$, s kojom i treba biti paralelan vektor brzine u trenutku t.

Pritom se i iznos vektora $\Delta \vec{r}$ (duljina tetive) sve manje razlikuje od duljine luka Δs (što se najlakše može dokazati računanjem omjera luka i tetive na nekoj kružnici, za sve manje središnje kuteve.) To znači da u limesu $\Delta t \to 0$ luk više nije veći od tetive, nego je

$\lim_{\Delta t \to 0}(|\Delta \vec{r}| = \Delta s)$ ili, pomoću diferencijala: $|d\vec{r}| = ds$.

Iz toga slijedi i puna usklađenost definicije vektora brzine s definicijom iznosa brzine:

$$v \equiv |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} .$$

Jedinica za brzinu mjeri, kao i kod svake druge vektorske veličine, samo njezin iznos, pa je očigledno da je osnovna SI jedinica $\frac{m}{s}$.

Iznos brzine može se, dakako, izračunati i iz skalarnih komponenata vektora brzine, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2}$, što se često koristi pri računanju pređenog puta. Budući da je iznos brzine derivacija puta, put kao funkcija je antiderivacija ili neodređeni integral iznosa brzine, a ako se računa put od trenutka t_1 do trenutka t_2 onda je to određeni integral:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt .$$

2.4 Ubrzanje

Ubrzanje (ili akceleracija) je vektorska veličina koja opisuje kako se brzo mijenja vektor brzine, pa stoga uključuje i promjenu iznosa i promjenu smjera brzine.

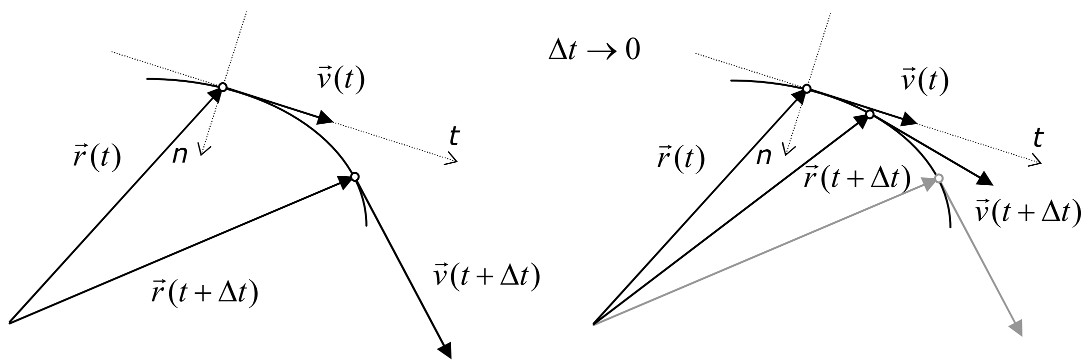
Definicija vektora ubrzanja:
Ubrzanje (akceleracija) je derivacija brzine po vremenu: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Ta vektorska jednadžba zamjenjuje tri skalarne jednadžbe, koje na analogan način povezuju skalarne komponente promatranih vektora. U Kartezijevim koordinatama:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Osnovna SI jedinica za ubrzanje je $\frac{m}{s^2}$, budući da se računa kao omjer promjene brzine i vremenskog intervala.

Za bolje razumijevanje pojma ubrzanja, kao i za mnoge primjene kod gibanja po krivulji, korisno je rastaviti vektor ubrzanja na tangencijalnu i normalnu komponentu. U tu svrhu pogledajmo kako se mijenja brzina točke koja se giba po krivulji (Slika 2.3).



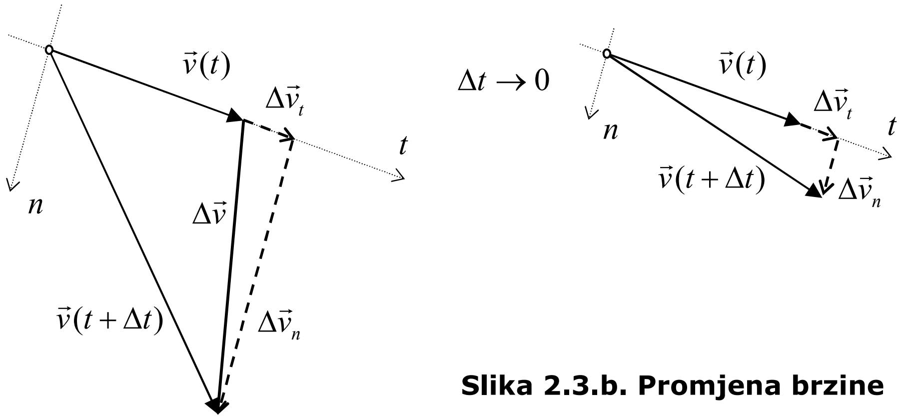
Slika 2.3.a. Promjena brzine

U trenutku t uočimo točku na položaju $\vec{r}(t)$ gdje ima brzinu $\vec{v}(t)$. Na tome mjestu uvedemo koordinatni sustav tangente i normale (t,n) tako da tangenta[13] t bude u smjeru brzine, a normala n prema "udubljenom" dijelu putanje.[14] U nekom kasnijem trenutku $t + \Delta t$ brzina ima drugačiji iznos i smjer, $\vec{v}(t+\Delta t)$, Slika 2.3.a lijevo. Na desnoj strani Slike 2.3.a naznačili smo da ćemo promatrati limes $\Delta t \to 0$.

[13] Iako se koristi isti simbol kao i za vrijeme, to ne bi smjelo izazvati zabunu.

[14] Ravninu normale definira promjena brzine $\Delta\vec{v}$ (zajedno s brzinom $\vec{v}(t)$) u limesu $\Delta t \to 0$.

Na Slici 2.3.b precrtane su samo brzine sa Slike 2.3.a (i koordinatni sustav), i to tako da je $\vec{v}(t+\Delta t)$ translatirana u istu početnu točku koju ima $\vec{v}(t)$, radi oduzimanja (obje uvećane 2 puta).



Slika 2.3.b. Promjena brzine

Na lijevoj strani Slike 2.3.b nacrtana je promjena brzine u intervalu Δt kao razlika $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$, a potom rastavljena na tangencijalnu komponentu $\Delta\vec{v}_t$ i normalnu komponentu $\Delta\vec{v}_n$. Na desnoj strani Slike 2.3.b prikazane su te dvije komponente promjene brzine na početku graničnog prijelaza $\Delta t \to 0$. U oba slučaja se vidi da $\Delta\vec{v}_t$ samo mijenja iznos brzine. No, tek na desnoj strani slike se razabire da će $\Delta\vec{v}_n$ u limesu samo zakretati smjer brzine, pa će $\Delta\vec{v}_t$ opisivati ukupnu promjenu iznosa brzine. Naime, kut između vektora $\vec{v}(t)+\Delta\vec{v}_t$ i vektora $\vec{v}(t+\Delta t)$ postaje sve manji, pa oni postaju krakovima jednakokračnog trokuta, dakle teže jednakom iznosu.[15]

Ako opisani rastav promjene $\Delta\vec{v}$ uvrstimo u definiciju akceleracije, dobijamo rastav ukupne akceleracije na tangencijalnu i normalnu komponentu:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}}_{\vec{a}_n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad .$$

Budući da u limesu $\Delta t \to 0$ komponenta $\Delta\vec{v}_t$ opisuje ukupnu promjenu iznosa brzine, imamo definiciju:

Tangencijalna akceleracija opisuje kako se brzo mijenja iznos brzine: $a_t = \dfrac{dv}{dt}$.

[15] Naravno da pritom i ukupna promjena brzine teži nuli, ali se može pokazati da "jednakokračnost" dolazi "brže" do izražaja. To nećemo formalno pokazivati, već se ograničavamo na grafičku sugestiju.

Budući da u limesu $\Delta t \to 0$ komponenta $\Delta \vec{v}_n$ opisuje samo promjenu smjera brzine, imamo definiciju:

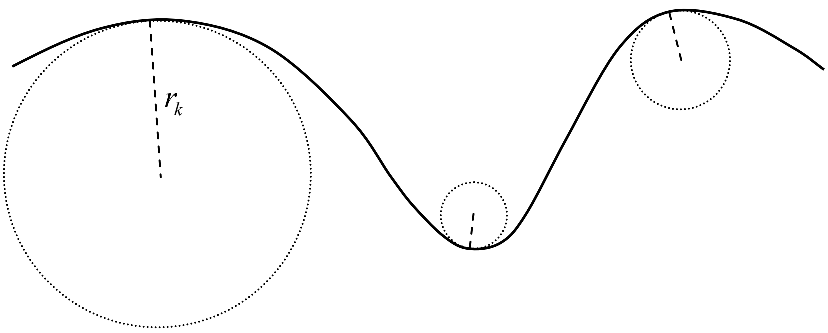
Normalna akceleracija opisuje kako se brzo mijenja smjer brzine: $a_n = \dfrac{v^2}{r_k}$.

Navedene formule mogu se izravno dobiti deriviranjem brzine, ako je napišemo kao produkt iznosa brzine v i jediničnog vektora $\dfrac{\vec{v}}{v}$ koji pokazuje smjer brzine:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\frac{\vec{v}}{v}\right) = \frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{v} + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right).$$

U prvom pribrojniku očito dobijamo iznos tangencijalnog ubrzanja, a_t (pomnožen jediničnim vektorom smjera brzine, kao što i treba). No, taj rezultat je bio očigledan i iz prethodnog grafičkog razmatranja.

Iz drugog pribrojnika može se dobiti iznos normalnog ubrzanja $a_n = v^2 / r_k$, ali bi trebalo unaprijediti matematička znanja naših studenata preko njihovih prosječnih potreba. Umjesto toga, pozivamo se na izvod centripetalnog ubrzanja u poglavlju "Gibanje po kružnici", gdje se dokazuje da je $a_{cp} = v^2 / r$.



Slika 2.4. Oskulatorne kružnice

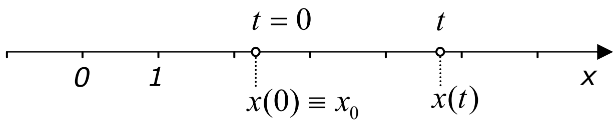
Odnos između centripetalne i normalne akceleracije možemo razumjeti pomoću Slike 2.4. Intuitivno je jasno da se svaka krivulja na nekom dovoljno malom dijelu luka može aproksimirati dijelom kružnice koja krivulju "ljubi" (latinski, doslovno: oskulira) na tome mjestu. Radijus te oskulatorne kružnice označava se sa r_k i naziva radijusom zakrivljenosti krivulje. Normalna akceleracija na tome mjestu na krivulji mora biti jednaka centripetalnoj akceleraciji na pripadnoj oskulatornoj kružnici.

3 Gibanje po pravcu

Gibanje po pravcu ili pravocrtno gibanje najjednostavniji je, ali i osobito važan slučaj gibanja. Budući da u tom slučaju ni brzina ni ubrzanje ne mogu proizvoljno mijenjati smjer, često se može zanemariti njihov vektorski karakter – kako se to obično čini u srednjoj školi (ali treba razumjeti ograničenja takvog pristupa).

Najčešće se jednolikima nazivaju ona gibanja kod kojih je iznos brzine konstantan (npr. po pravcu, po kružnici itd.) pa nemaju tangencijalne akceleracije. Tada se ubrzanima nazivaju gibanja koja imaju tangencijalnu akceleraciju (različitu od nule).[16] Najjednostavniji slučaj tih ubrzanih gibanja predstavljaju jednoliko ubrzana gibanja, kod kojih je tangencijalno ubrzanje konstantnog iznosa pa iznos brzine dobija jednaki prirast (ili pad) svake sekunde.[17]

Za opis gibanja po pravcu, zgodno je pravac pretvoriti u koordinatnu os (npr. os *x*), na kojoj će položaj točke biti opisan samo jednom koordinatom kao funkcijom vremena. U trenutku kad uključimo štopericu ($t=0$), točka je u položaju $x(0)$ za koji ćemo koristiti oznaku x_0, a u nekom prozvoljnom trenutku t ima položaj $x(t)$ koji možemo kraće pisati samo kao x.



I vektor brzine i vektor akceleracije imaju, dakako, samo *x*-komponentu, koja se od njihovih iznosa (v ili a), po definiciji pozitivnih, razlikuje u tome da će biti negativna za vektore usmjerene suprotno od osi *x*.

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}\,,\ a_x = \frac{dv_x}{dt}}$$

3.1 Jednoliko gibanje po pravcu

Kod jednolikog gibanja po pravcu, brzina ima stalno isti iznos (a i smjer – u koji ćemo postaviti i smjer osi *x*), pa su funkcije koje opisuju ovisnost akceleracije, brzine i položaja o vremenu osobito jednostavne. To da je brzina konstantna možemo pisati i kao $v_x = v_{0x}$ (umjesto $v_x = konst.$), gdje je v_{0x} kraća oznaka za početnu brzinu $v_x(0)$. Pređeni put od trenutka $t=0$ do trenutka t jednak je razlici položaja, tj. $s = x - x_0$ (budući da se točka gibala

$$a_x = 0$$
$$v_x = konst.$$
$$x = v_x t + x_0$$

[16] U drugačijem kontekstu, ponekad se ubrzanima nazivaju gibanja koja imaju bilo kakvu akceleraciju; u tom slučaju, i jednoliko gibanje po krivulji (kružnici) ubraja se u ubrzana gibanja zbog normalne (centripetalne) akceleracije.

[17] U ovome kontekstu termin "ubrzano gibanje" općenito obuhvaća i slučaj usporenoga gibanja, mada se u konkretnom slučaju može precizirati da se radi o usporenom gibanju.

stalno u pozitivnom smjeru osi *x*), pa posljednja relacija u gornjem okviru znači isto što i $\boxed{s = vt}$ (uvažavajući da je kod opisanog gibanja $v_x = v$). Put se, dakako, tako računa zato što pri konstantnoj brzini prelazimo jednake udaljenosti svake sekunde.

Formalno smo navedenu funkciju položaja mogli dobiti i integriranjem brzine. Budući da je brzina derivacija položaja, položaj je neodređeni integral brzine:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad x = \int v_x dt = v_x \int dt = v_x t + C$$

Konstantu integracije interpretiramo tako da uvrstimo $t = 0$ u rezultat $x = v_x t + C$, što daje $x(0) = C$, odnosno $C = x_0$ (formalno se kaže da je to početni uvjet).

3.2 Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu

Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu određeno je zahtjevom da je akceleracija konstantna (i nije nula). Vektori akceleracije i brzine leže na istom pravcu (inače bi tijelo skretalo), ali ne moraju biti u istom smjeru. Pravac je koordinatna os *x*, pa oni imaju samo x-komponente.

Budući da je akceleracija derivacija brzine, brzinu dobijamo kao neodređeni integral akceleracije:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \rightarrow \quad v_x = \int a_x dt = a_x \int dt = a_x t + C$$

Konstantu integracije opet interpretiramo tako da uvrstimo $t = 0$ u rezultat $v_x = a_x t + C$, što daje (početni uvjet) $v_x(0) = C$, odnosno $C = v_{0x}$. Odatle je konačno: $v_x = a_x t + v_{0x}$.

Nadalje, budući da je brzina derivacija položaja, funkcija položaja je neodređeni integral brzine:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad x = \int v_x dt = \int (a_x t + v_{0x}) dt = a_x \int t dt + v_{0x} \int dt = a_x \frac{t^2}{2} + v_{0x} t + C$$

Sada opet uvrstimo $t = 0$ u dobijeni rezultat $x = a_x \frac{t^2}{2} + v_{0x} t + C$, što daje $x(0) = C$, odnosno $C = x_0$, te konačno imamo $x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{0x} t + x_0$.

$$a_x = konst.$$
$$v_x = a_x t + v_{0x}$$
$$x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{0x} t + x_0$$

Tako dobijamo izraze analogne onima kod jednolikog gibanja po pravcu (štoviše, vidi se da ove formule prelaze u izraze za jednoliko gibanje po pravcu ako se uvrsti $a_x = 0$).

No, ovdje ne možemo općenito smatrati da je razlika između trenutnog i početnog položaja ($x - x_0$) jednaka pređenom putu s, jer je tijelo i pri konstantnoj akceleraciji moglo promijeniti smjer brzine u suprotni, kao npr. u najvišoj točki vertikalnog hitca uvis (koji je jednoliko ubrzano gibanje po pravcu uz konstantno ubrzanje sile teže). Iz istog razloga nije općenito moguća zamjena skalarne komponente i iznosa brzine (tj. $v_x \neq v$)

Na istu stranu:

$$v = at + v_0$$
$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t$$

Ipak, često je praktičnije koristiti skalarne srednjoškolske izraze za jednoliko ubrzano gibanje po pravcu, samo treba razumjeti da se u tom slučaju tijelo mora cijelo vrijeme gibati na istu stranu. Tada se smjer osi *x* i smjer brzine podudaraju, pa je $v_x = v$. Isto vrijedi i za akceleraciju ako brzina raste. Jedino za usporeno gibanje moramo usvojiti dogovor da je "akceleracija a negativan broj".

Za usporedbu s kasnije opisanim gibanjem po kružnici, važno je uočiti da kod gibanja po pravcu nema normalne akceleracije, pa je $\vec{a} = \vec{a}_t$. Kod jednolikog i jednoliko ubrzanog gibanja po kružnici (ili krivulji) mogu se koristiti slični izrazi kao kod pravca, ali se tamo mora precizirati da iznos brzine (pa stoga i pređeni put) ovise samo o tangencijalnoj akceleraciji.

3.3 Slobodan pad

Ako možemo zanemariti otpor zraka, ili još bolje – ako bismo izveli pokus u vakuumiranoj prostoriji – vidjeli bismo da sva tijela padaju s jednakim ubrzanjem. Obično se pod nazivom *slobodan pad* podrazumijeva takvo (idealizirano) gibanje, mada se u nekim prilikama isti naziv odnosi na padanje u zraku uz uvažavanje otpora zraka (što se lako razabire iz konteksta).

Tijelo koje pada dobija ubrzanje od svoje težine (definiramo je u idućem poglavlju), za koje se koristi naziv *akceleracija slobodnog pada,* $\vec{g}$ (naziv podrazumijeva zanemarivanje otpora zraka). Na raznim mjestima na površini Zemlje (uključujući i visinske razlike od nekoliko km), g varira u rasponu od samo oko 0,5% (opširnije u poglavlju o gravitaciji), pa se često koristi zaokruženi prosječni iznos od 9,81 m/s^2.

Tijela veće gustoće i kompaktnog oblika (metalna kugla, kamen itd.) doista se u padu gibaju vrlo približno jednoliko ubrzano, s akceleracijom $\vec{g}$, prvih nekoliko sekundi (nekoliko desetaka metara) nakon što ih ispustimo. No, otpor zraka raste s brzinom, i nakon malo dužeg padanja čak i kod takvih tijela praktično zaustavi daljnje ubrzavanje (npr. za čovjeka ubrzanje prestaje oko brzine od 200 km/h).

4 Newtonovi aksiomi

Lex II: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.* (Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London, 1687.)

U prijevodu: "Zakon II: *Promjena gibanja uvijek je proporcionalna sili koja djeluje, i dešava se u smjeru pravca djelovanja sile."*

A može i ovako: *Mala moja, primi ti na znanje, sila masi daje ubrzanje.* (Navodna varijanta iz večernjih tečajeva osnovne škole u 50-tim godinama prošlog stoljeća.)

Zajedničko obilježje Newtonovog izvornog teksta i pjesmice iz večernjih tečajeva jest da se ni jedna ni druga formulacija temeljnog zakona gibanja ne mogu neposredno primijeniti u proračunima gibanja tijela.

Newton je, dakako, u daljnjem tekstu *Principa* pojašnjavao značenje ovoga zakona, i primjenjivao ga u tumačenju gibanja.[18] Njegova je ogromna povijesna zasluga da je, pored ostaloga, sa svoja tri zakona gibanja (koje često nazivamo aksiomima) zapravo postavio temelje fizikalne znanosti kakvu danas poznajemo.

No, mi se ovdje nećemo baviti povijesnim razvojem fizikalnih koncepata. Zato će formulacije Newtonovih aksioma slijediti praksu standardnih današnjih udžbenika: da budu precizne i izravno primjenjljive na proračune gibanja tijela.

Newtonovi aksiomi povezuju kinematičke veličine koje se odnose na gibanje tijela (brzinu i akceleraciju) sa silama koje na tijelo djeluju. Budući da različite točke tijela mogu imati različite brzine i akceleracije – a i sile mogu djelovati na različitim mjestima na tijelu – odmah nakon prikaza aksioma pokazati ćemo da se brzine i akceleracije, o kojima aksiomi govore, odnose na centar masa tijela, bez obzira na položaj hvatišta sile.

Do tada možemo privremeno zamišljati da se aksiomi odnose samo na tijelo zanemarive veličine, koje možemo dobro prikazati samo jednom točkom. Takva tijela ćemo zvati česticama[19] (npr. kod definicije centra masa).

4.1 Prvi Newtonov aksiom – zakon inercije

Tek u doba Galileja i Newtona, fizika se definitivno oslobađa Aristotelove zablude da je za gibanje tijela potrebna sila koja ga održava. Taj fundamentalni preokret naj-

---

[18] Ali nije promijenio izvornu formulaciju ni u narednim izdanjima *Principa*.

[19] Pojam "materijalna točka" nećemo koristiti u ovome tekstu. Iskustvo pokazuje da mnogi studenti imaju problema s razumijevanjem toga koncepta. Oni bi naučili napamet fizikalne zakone formulirane za materijalnu točku, a da nikada ne shvate kakve to veze ima sa stvarnim tijelima.

preciznije formulira prvi Newtonov aksiom, poznat i pod nazivima "zakon tromosti" ili "zakon inercije".

Prvi Newtonov aksiom:

Ako na tijelo ne djeluje sila, tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu.

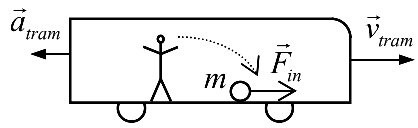
Ako se aksiom primijeni u nekom sustavu vezanom za površinu Zemlje, on znači da tijelo koje je mirovalo ostaje mirovati, a da se tijelo koje se gibalo nastavlja jednoliko pravocrtno gibati, sve dok neka sila to ne promijeni. Dakako, na Zemlji se ovaj drugi slučaj zapravo ne opaža, jer su tijela stalno izložena djelovanju različitih sila (težina, trenje, otpor zraka itd) koje ometaju jednoliko pravocrtno gibanje.

No, bilo gdje u svemiru daleko od nebeskih tijela, lako bi se mogao izravnim opažanjem potvrditi zakon inercije. Štoviše, izraz "stanje mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu" označava samo jedno fizikalno stanje, zbog relativnosti gibanja u klasičnoj fizici (kao i u specijalnoj teoriji relativnosti). Da bi se uopće odredila brzina tijela (uključujući i slučaj da tijelo miruje), potrebno je najprije odabrati referentni sustav u odnosu na koji se ona mjeri. Naš se vidljivi svemir sastoji od galaksija i njihovih nakupina koje se globalno međusobno udaljavaju (i još kojekako "lokalno" gibaju), dakle sva se nebeska tijela kreću, i nijedno se ne može odabrati za univerzalni referentni sustav.

Treba, ipak, spomenuti da novija precizna mjerenja mikrovalnog zračenja koje prožima cijeli svemir omogućavaju određivanje brzine tijela u odnosu na to zračenje. U okvirima opće teorije relativnosti, tako se može ustanoviti preferirani sustav za mjerenje brzine. No, to ne utječe na koncept relativnosti gibanja u klasičnoj mehanici, na temelju kojega se razvijala i opća teorija relativnosti.

Moramo, međutim, razlikovati dvije klase referentnih sustava jer fizikalni zakoni nemaju u njima isti oblik. Sustavi u kojima vrijedi gore navedeni oblik zakona inercije nazivaju se (po definiciji) *inercijalnim sustavima*, i oni se jedan u odnosu na drugoga mogu gibati samo jednoliko pravocrtno.

Drugu klasu čine sustavi kao što je npr. tramvaj koji koči: u takvom sustavu neće tijelo prepušteno samo sebi ostati da miruje (npr. lopta koja je stajala na podu), nego će ubrzavati u suprotnom smjeru od ubrzanja sustava (ljudima u tramvaju koji koči izgleda kao da i njih i loptu neka sila vuče naprijed).[20] Takvi se sustavi nazivaju *ubrzanima* ili *neinercijalnima*, a prividna sila[21] koja izaziva



Slika 4.1. Ubrzani sustav

[20] Iz vanjskog inercijalnog sustava, dakako, vidimo da se lopta samo nastavila jednoliko gibati, dok se tramvaj počeo zaustavljati.

[21] Kaže se još i pseudosila (lažna sila), budući da se iz vanjskog inercijalnog sustava ta sila ne opaža (jer se ne opaža ubrzanje lopte).

opisano ubrzanje unutar sustava naziva se inercijalnom silom $\vec{F}_{in}$. (Na Slici 4.1 označena je inercijalna sila koju promatrač vidi kao uzrok ubrzavanja lopte.)

Sustavi vezani uz površinu Zemlje, u kakvima živimo, nisu posve inercijalni, ali su odstupanja vrlo mala – toliko mala da nisu ometala otkrivanje fizikalnih zakona u obliku u kojem vrijede u inercijalnim sustavima.

Činjenicu da tijelo u inercijalnom sustavu ustraje u zatečenom stanju gibanja, sve dok neka vanjska sila to stanje ne počne mijenjati, pripisujemo njegovoj masi, što se može upotrijebiti za njezinu definiciju:

Masa (ili tromost, ili inercija) je svojstvo tijela da se opire promjeni gibanja.

4.2 Drugi Newtonov aksiom – temeljni zakon gibanja

Uobičajeno je za drugi Newtonov aksiom koristiti dvije formulacije.

Prva je fromulacija striktno govoreći netočna, ali su pogreške zanemarivo male pri brzinama daleko manjim od brzine svjetlosti ($v << c$), npr. tek oko desete znamenke (što je praktično nemjerljivo) čak i za najbrže današnje avione. Ona je osobito prikladna za svakodnevnu upotrebu u tehnici:

Drugi Newtonov aksiom, pomoću ubrzanja, za $v << c$: *Ako na tijelo djeluje sila, ona mu daje ubrzanje* $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

Ako na tjelo djeluje više sila, njihovi se učinci vektorski zbrajaju. U praktičnom računu obično je zgodnije najprije zbrojiti sile, pa iz rezultantne sile dobiti rezultantnu akceleraciju, simbolički:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Ako akceleraciju napišemo kao drugu derivaciju položaja po vremenu, vidimo da je temeljni zakon gibanja diferencijalna jednadžba drugog reda, npr. za x komponente:

$$\sum F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Jedinica za silu, njutn (N), definira se iz $\vec{F} = m\vec{a}$: 1N je sila koja masi od 1kg daje ubrzanje od 1m/s^2 (N = kgm/s^2).

Sva tijela na Zemlji stalno su izložena barem jednoj sili – sili kojom ih Zemlja privlači. Budući da svakom tijelu koje slobodno pada daje istu akceleraciju g, ona mora biti proporcionalna masi tijela. Tu privlačnu silu (na polovima čista gravitacija, a drugdje malo korigirana zbog rotacije Zemlje) nazivamo težinom i označavamo simbolom G:

Težina tijela je sila kojom Zemlja privlači to tijelo, $G = mg$.

Ako na tijelo djeluje više sila, njihov zbroj može biti jednak nuli, pa tijelo neće dobivati akceleraciju. To je npr. slučaj kod tijela oslonjenih ili učvršćenih na podlogu, što detaljnije izučava statika.

Bilo da sila uopće nema ili je njihov zbroj nula, prema drugom Newtonovom aksiomu tijelo nema akceleracije, pa je u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. To znači da bi se moglo smatrati kako je prvi aksiom (zakon inercije) zapravo sadržan u drugom aksiomu kao njegov specijalni slučaj. Ipak, zakon inercije navodi se izdvojeno iz barem dva razloga.

Gledano u povijesnom kontekstu, Newton prvim aksiomom naglašava Galilejeve spoznaje (za što mu je i odao priznanje) kojima se znanost toga vremena odvaja od aristotelijanskih zabluda o fizici. No, važniji je razlog to što zakon inercije predstavlja polazište za definiranje inercijalnih sustava: tek kad su sustavi tako definirani, mogu se formulirati ostali aksiomi i drugi zakoni klasične fizike koji će u njima vrijediti.

Inercijalne sile, koje se javljaju u ubrzanim sustavima, zahtijevale bi drugačiju formulaciju klasičnih zakona. Iako ih promatrač iz inercijalnog sustava ne vidi, one su u ubrzanom sustavu realne sile slične težini tijela, i s njima se mora računati. Npr., sa Slike 4.1 vidimo da je inercijalna sila na loptu $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_{tram}$ (dakle, proporcionalna masi), zato da bi iz vanjskog inercijalnog sustava bila akceleracija lopte nula.[22] Ipak, promatrač iz tramvaja zna da nema nebeskog tijela koje bi loptu privlačilo na tu stranu, i ne zna kako bi na tu silu primijenio zakon akcije i reakcije. Ukratko, on zna da se nalazi u ubrzanom sustavu, pa čak i kolika je akceleracija njegovog sustava (suprotna je akceleraciji lopte u odnosu na tramvaj). Dakle, za razliku od brzine, akceleracija sustava nije relativna (ne određuje se prema proizvoljnom vanjskom referentnom sustavu).

Za drugu, točnu, formulaciju drugoga Newtonovog aksioma potrebno je definirati pojam količine gibanja tijela:

Količina gibanja (ili impuls[23]) je umnožak mase i brzine, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Simbol $\vec{p}$ je samo oznaka za taj umnožak: gornja formula nije nikakav zakon fizike, nego samo definicija fizikalne veličine i dogovor o simbolu. Količina gibanja je jedna od fundamentalnih veličina u fizici, i pomoću nje se drugi Newtonov aksiom može formulirati u punoj općenitosti:

Drugi Newtonov aksiom, opća i točna fromulacija:

Brzina promjene količine gibanja jednaka je sili koja na tijelo djeluje: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

Veza s ranijom, približno točnom formulom, dobije se uvrštavanjem (i deriviranjem) umnoška mase i brzine umjesto simbola $\vec{p}$:

---

[22] Ukupna akceleracija lopte je $-\vec{a}_{tram}$ u odnosu na tramvaj i $+\vec{a}_{tram}$ kojom je tramvaj nosi.

[23] Naziv "količina gibanja" uobičajen je u udžbenicima, dok fizičari uglavnom koriste termin "impuls".

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Ako bismo masu tijela mogli smatrati konstantnom, njezina bi derivacija po vremenu bila jednaka nuli, pa bismo dobili zakon gibanja u ranije navedenom obliku $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$.

Međutim, specijalna teorija relativnosti (Pogavlje 9) pokazuje da masa raste s brzinom tijela: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (gdje je m_0 masa mirovanja),

pa se u načelu ne može izostaviti član s njezinom derivacijom. Ipak, taj je porast vrlo mali ako brzina tijela v nije jako blizu brzine svjetlosti c. Npr. za brzinu tijela od 3000 m/s imamo m = 1,00000000005 m_0 , što je u standardnim tehničkim primjenama nemjerljivo povećanje mase. To znači da je u području takvih i manjih brzina posve dovoljna formula $\vec{F} = m\vec{a}$.

4.3 Treći Newtonov aksiom – zakon akcije i reakcije

Umjesto dosta raširene formulacije "svaka akcija uzrokuje po intenzitetu jednaku i suprotno usmjerenu reakciju", za primjenu je prikladnija dulja formulacija koja detaljnije opisuje međudjelovanja dvaju tijela.

Treći Newtonov aksiom:

Ako jedno tijelo djeluje silom na drugo tijelo, onda i to drugo tijelo djeluje na ono prvo silom jednakog iznosa i na istom pravcu ali u suprotnom smjeru.

Sile, dakle, postoje samo u parovima, kao međudjelovanje tijela, a koju od njih nazvati akcijom odnosno reakcijom često je posve proizvoljno.

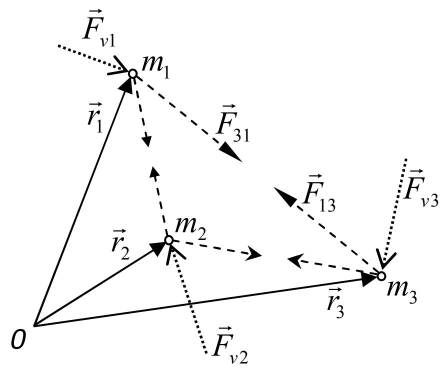
Iako je $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (uz dogovor da je $\vec{F}_{12}$ sila kojom tijelo 1 djeluje na tijelo 2, i obrnuto), ne možemo smatrati da se te suprotne sile poništavaju – i to zato što djeluju na različita tijela, na koja mogu imati i vrlo različit učinak. Lakše tijelo će dobiti veće ubrzanje, a tvrđe tijelo manju deformaciju. Primjerice, kod udarca šakom u trbuh čak i ne pomišljamo na to da je i trbuh djelovao na šaku silom istog iznosa.

Jedino ako promatramo međudjelovanje dvaju tijela koja su unutarnji dio nekog sustava, a zanima nas samo gibanje sustava kao cjeline, unutarnja međudjelovanja ne utječu na to gibanje, te možemo smatrati da se u tome pogledu poništavaju.

4.4 Centar masa

Razmotrimo proizvoljni sustav čestica, koje mogu ali i ne moraju biti povezane u tijelo, npr. neki volumen molekula plina, ili sve atome koji sačinjavanju neko kruto tijelo. Pretpostavljamo da su čestice dovoljno malog volumena tako da se položaj svake čestice može opisati samo jednom točkom,[24] odnosno radij-vektorom. Tada brzina i akcelracija iz Newtonovih aksioma imaju jednoznačni smisao derivacija tih vektora.

Za definiranje i opis svojstava centra masa dovoljno je promotriti sustav od samo tri takve točkaste mase m_1, m_2, m_3 na Slici 4.2 (a poopćenje na više čestica je očigledno). U nekom koordinatnom sustavu (koji nije prikazan) njihov položaj određen je pripadnim radij-vektorima. Unutar sustava čestice mogu međusobno djelovati parovima unutarnjih sila (od kojih je ovdje opisan samo par $\vec{F}_{31}, \vec{F}_{13}$ radi bolje preglednosti slike). Usto, na svaku česticu mogu djelovati i vanjske sile (koje potječu izvan sustava): one su za pojedinu česticu zbrojene u rezultantu, a te rezultante su označene simbolima $\vec{F}_{v1}$, $\vec{F}_{v2}$, $\vec{F}_{v3}$.



Slika 4.2. Sustav od 3 čestice

Za svaku česticu napisati ćemo drugi Newtonov aksiom, navodeći sve prikazane sile eksplicitno.

Te ćemo tri jednadžbe potom zbrojiti, pri čemu će se unutarnje sile dokinuti, jer je $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$. Tako dobijamo jednadžbu u kojoj imamo samo vanjske sile na lijevoj strani, te akcelaracije svih čestica na desnoj:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{v1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} &= m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{v2} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} &= m_2\vec{a}_2 \\ \vec{F}_{v3} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} &= m_3\vec{a}_3 \end{aligned}\right\} +$$

$$\boxed{\vec{F}_{v1} + \vec{F}_{v2} + \vec{F}_{v3} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}$$

Sumu vanjskih sila odmah možemo razumijeti kao ukupnu vanjsku silu koja djeluje na sustav. Da bismo razumjeli sumu $m_i\vec{a}_i$, moramo najprije definirati *centar masa* sustava ili tijela.

---

[24] Umjesto sustava čestica, možemo tijelo u mislima razdijeliti na komadiće vulumena, provesti granični prijelaz $\Delta V \to 0$ kojim dobijamo točkaste mase, pa zbrajanje čestica postaje integriranje po volumenu odnosno masi tijela.

Centar masa je točka C određena radij-vektorom

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}} \qquad \text{npr:} \quad x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} = \frac{\int x\,dm}{m}$$

gdje je m ukupna masa sustava, a zbraja se po svim česticama sustava ili tijela – ili, alternativno, integrira po ukupnoj masi tijela.[25]

Napišimo sada definiciju centra masa za one tri čestice sa Slike 4.2.

Prvo je pomnožimo sa m da se riješimo razlomka: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = m\vec{r}_C$

Deriviranjem te jednadžbe po vremenu dobijamo: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = m\vec{v}_C$

Slično, deriviranje ove druge jednadžbe daje: $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = m\vec{a}_C$

Dobiveni rezultat pokazuje da sume produkata po česticama možemo zamijeniti jednim produktom koristeći centra masa: jednako za koordinate, brzine i akceleracije u sustavu.

Tako druga jednadžba pokazuje da se ukupna količina gibanja ne mora računati kao zbroj količina gibanja svih čestica $\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = m\vec{v}_C$, već je jednaka produktu mase sustava i brzine njegovog centra masa:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_C}$$

A treća jednadžba otkriva da je zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na sustav (formula ispod Slike 4.2) jednak produktu mase sustava i akceleracije njegovog centra masa:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{vi} = m\vec{a}_C}$$

To se, dakako, odnosi i na specijalni slučaj da sustav čestica čini tijelo, čime smo dokazali uvodnu tvrdnju iz ovog poglavlja. Dakle, *bez obzira gdje na tijelu sile djeluju, one daju ubrzanje njegovom centru masa prema drugom Newtonovom aksiomu*. Istovremeno, te iste sile mogu tijelu davati i kutno ubrzanje oko centra masa, o čemu govorimo u poglavlju o rotaciji.

---

[25] Nakon zamišljene razdiobe tijela na komadiće $\Delta V \to 0$, integriranjem se provodi zbrajanje po pripadnim diferencijalima mase, dm. Primjer takvog integriranja prikazan je u poglavlju 7.3.

4.5 Zakon očuvanja količine gibanja

Gornje dvije relacije omogućuju da i precizniji oblik drugog Newtonovog aksioma, zakon o promjeni količine gibanja, tj. $\sum \vec{F}_{vi} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, lakše interpretiramo pomoću centra masa.

Napose, u slučaju da nema vanjskih sila, kažemo da je sustav izoliran (ili je izolirano promatrano pojedinačno tijelo). Tada je $d\vec{p}/dt = 0$, pa se količina gibanja ne mijenja, tj. vrijedi zakon njezinog očuvanja:

Zakon očuvanja količine gibanja: *U izoliranom sustavu ukupna količina gibanja je konstantna.*

Tada će se centar masa sustava ili tijela gibati jednoliko pravocrtno (ili mirovati).

Zakoni očuvanja imaju fundamentalnu teorijsku ulogu u fizici. Npr. u klasičnoj mehanici se pokazuje da očuvanje energije proizlazi iz homogenosti vremena, očuvanje količine gibanja iz homogenosti prostora, a očuvanje momenta količine gibanja iz izotropnosti prostora.

No, jednako su važni i u svakodnevnim primjenama. Npr. zakon o očuvanju količine gibanja koristit ćete na vježbama u rješavanju zadataka sa sudarima. Ovdje možemo samo spomenuti kako taj zakon objašnjava gibanje rakete. Ako gledamo iz sustava centra masa u kojemu raketa i njezino gorivo u početnom trenutku miruju, jasno je da će raketa u pogonu dobiti onoliku količinu gibanja koliku njezino izbačeno gorivo dobije u suprotnom smjeru. Odatle slijedi da možemo trošiti manje goriva ako mu dademo veću brzinu.

4.6 Fundamentalne sile

Dosadašnja istraživanja pokazuju da sve sile koje na Zemlji opažamo možemo svesti na samo nekoliko fundamentalnih sila. Za njih su uobičajeni slijedeći nazivi:

1. Gravitacijska sila,
2. Elektromagnetska sila,
3. Slaba nuklearna sila, te
4. Jaka nuklearna sila.

Prve dvije su odavno poznate i lako se opažaju i na velikim udaljenostima. Druge dvije se opažaju samo na malim udaljenostima, otprilike u razmjerima atomske jezgre, otkrivene su tek u prošlom stoljeću (i dobile su prilično nemaštovita imena). Jaka nuklearna sila snažno djeluje među kvarkovima – česticama od kakvih su građeni protoni i neutroni – pa dakle i među protonima i neutronima. Slaba djeluje među kvarkovima i leptonima (od kojih je opće poznat samo elektron) pa se opaža npr. kod beta radioaktivnog raspada.

Uočite da su do prije par stoljeća električna i magnetska sila promatrane kao posve nezavisne sile. Tek su u 19. stoljeću do kraja opisane veze među njima, i postalo je jasno da se radi o različitim manifestacijama jedne te iste sile.

Na sličan način (mada malo kompliciraniji), povezane su sredinom 20. stoljeća elektromagnetska i slaba nuklearna sila, te je uveden i zajednički naziv elektroslaba sila.

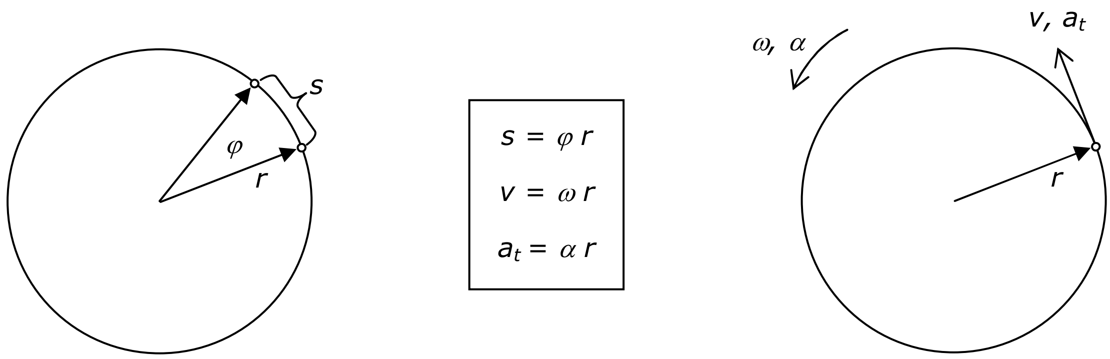
Od tada se, dakako, istražuje mogućnost da su sve četiri gore navedene sile zapravo samo različite manifestacije jedne univerzalne kozmičke sile. Danas je općenito prihvaćena teorija da zadnje tri s popisa (sve osim gravitacije) doista imaju zajedničko ishodište. One se manifestiraju kao jedinstvena sila, ali samo pri mnogo većim gustoćama energije nego što ih danas nalazimo u prirodnom okolišu.

Gravitacijska se sila od ostalih izdvaja svojom specifičnom prirodom koju je otkrila opća teorija relativnosti. Zbog toga su malo vjerojatni izgledi da bi se s njima mogla "ujediniti", iako ima i takvih teorijskih pokušaja.

5 Gibanje po kružnici

5.1 Linearne i kutne veličine

Budući da je gibanje po kružnici usko povezano s rotacijom (bilo da rotiraju tijela ili apstraktne veličine, npr. vektori), korisno je odmah uvesti kutne veličine u njegov opis. Ako promatramo gibanje neke čestice po kružnici, lako vidimo vezu između puta *s* koji ona pređe i kuta φ za koji se zakrene radij-vektor $\vec{r}$ povučen iz središta kružnice do te točke (na Slici 5.1 opisan je samo iznos radij-vektora, *r*, tj. radijus kružnice):



Slika 5.1. Veze linearnih i kutnih veličina

Kut mjerimo kao omjer luka i radijusa, npr. za s = 1 cm i r = 2 cm imamo $\varphi = s/r$ = 0,5 u radijanima.[26] Odatle je, naravno, $s = \varphi\, r$. Ostale dvije jednadžbe sa Slike 5.1 dobijamo deriviranjem prve po vremenu. Deriviranjem puta po vremenu (na lijevoj strani) dobijamo iznos brzine v, a daljnjim deriviranjem iznosa brzine dobijamo tangencijalnu akceleraciju a_t. Istim deriviranjem na desnoj strani jednadžbi (gdje je r konstanta) dobijamo kutnu brzinu ω te kutnu akceleraciju α (koje su definirane analogno pripadajućim linearnim veličinama):

$$\boxed{\text{Kutna brzina} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}} \qquad \boxed{\text{Kutna akceleracija} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

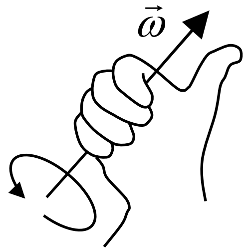
Jedinica za kutnu brzinu je s^{-1}, a za kutnu akceleraciju s^{-2}. Kao što linearnu brzinu mjerimo metrima u sekundi (m/s), tako kutnu mjerimo radijanima u sekundi – samo što se umjesto radijana piše "1", pa jedinica ima oblik $1/s = s^{-1}$ (i slično za akceleraciju).

---

[26] To možemo čitati kao "0,5 radijana", ali radijan očito nije jedinica koju ćemo pisati uz broj, jer su se centimetri u omjeru luka i radijusa pokratili.

Iako ni pređeni put, ni kut zakreta, ne možemo smatrati vektorima,[27] kutnu brzinu i kutno ubrzanje možemo "pretvoriti" u vektore, tj. jednoznačno im pridružiti smjer tako da zadovoljavaju pravila vektorskog računa, što je osobito korisno kod opisa rotacije. Zamislimo da je čestica na Slici 5.1 točka nekog tijela koje rotira (a i da je radij-vektor skup točaka toga tijela). Tijelo se zakreće u smislu naznačenom na slici, "suprotno od kazaljke na satu" (s našeg motrišta). No, to nije vektorski smjer, jer mu ne možemo pridružiti usmjerenu dužinu koja bi npr. ostala stalna kod konstantne kutne brzine. Jedina nepomična dužina vezana uz tijelo koje rotira kao na Slici 5.1 jest os rotacije, tj. okomica na sliku koja prolazi kroz središte kružnice.

Stoga je jedino moguće rješenje da vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ bude paralelan sa osi rotacije. On, dakle, stoji okomito na Sliku 5.1 (tj. na kružnicu po kojoj se točka giba), a smjer mu je dogovorno odabran tako da gleda prema nama ako je kruženje "suprotno od kazaljke na satu".

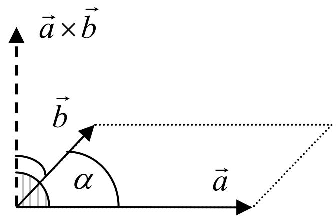


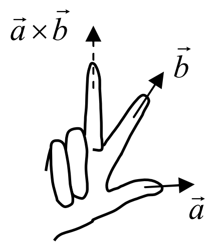
Još je jednostavnije vektor kutne brzine opisati tzv. pravilom desne ruke: ako savijeni prsti desne ruke pokazuju smjer kruženja – bilo da se točka giba po kružnici ili kruto tijelo rotira oko čvrste (nepomične) osi – onda ispruženi palac pokazuje smjer vektora $\vec{\omega}$ (koji, podrazumijeva se, mora biti okomit na ravninu kruženja).

Za tako opisani vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ može se definirati vektor kutne akceleracije $\vec{\alpha}$ kao njegova derivacija po vremenu (istog smjera kod ubrzavanja, suprotnog kod usporavanja). I relacije između brzina i akceleracija (sa Slike 5.1) mogu se također prevesti u vektorski oblik za *gibanje po kružnici* (a i za *rotaciju oko čvrste osi*):

Vektorske veze za $\vec{\omega}$ i $\vec{\alpha}$: $$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega}\times\vec{r}\\ \vec{a}_t &= \vec{\alpha}\times\vec{r}\end{aligned}}$$ pri čemu je $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

Znakom "×" (čita se "eks") označavamo vektorski (ili vanjski) produkt dvaju vektora. To je jedna od dviju uobičajenih operacija množenja vektora (a druga operacija množenja je skalarni produkt). Rezultat vektorskog množenja je vektor (a rezultat skalarnog množenja vektora je skalar). Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ je vektor okomit na ravninu koju tvore ta dva vektora, a njegovu orijentaciju (na slici: gore ili dolje) određujemo pravilom desne ruke.



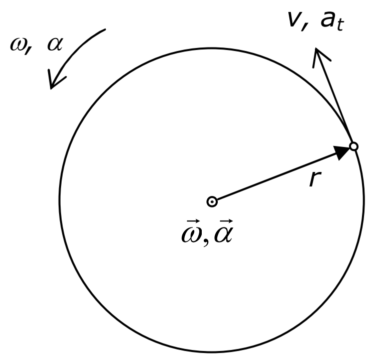


[27] Osim u limesu prema nuli.

Iznos vektorskog produkta dvaju vektora jednak je površini pravokutnika koji oni određuju kad se prikažu usmjerenim dužinama povučenima iz iste točke, tj. $|\vec{a}\times\vec{b}|$ $= ab\sin\alpha$. Iznos je očito nula za paralelne vektore, a najveći za okomite (i tada je jednak ab).

Pravilo desne ruke, koje služi samo da se ustanovi na koju stranu "gleda" produkt (jer već znamo da mora biti okomit na oba vektora), navodi se u više varijanti. Prema ilustraciji na gornjoj slici: prvi prst (palac) u smjer prvog vektora iz produkta, drugi prst (kažiprst) u smjer drugog vektora (bar približno, jer kut između ta dva prsta ne može biti puno veći od pravoga, dok kut između dva vektora može ići do 180^0) – i tada treći prst (srednjak) pokazuje na koju stranu gleda produkt (ako ga blago savijemo, približno okomito na palac i kažiprst).

Važno svojstvo vektorskog produkta je da je antikomutativan, $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$, tj. zamjena redoslijeda vektora koje množimo daje produkt u suprotnom smjeru (provjerite primjenom pravila desne ruke!).



Nakon ove definicije i opisa vektorskog produkta (nekima možda poznatih iz srednje škole), lako je provjeriti navedene vektorske veze za $\vec{\omega}$ i $\vec{\alpha}$. Prema definiciji koja im je prethodila, vektor $\vec{\omega}$ stoji okomito na kružnicu i gleda prema nama (što je simbolički naznačeno kružićem s točkom u sredini, kao da vidimo vrh vektorske strelice). Vektor $\vec{v}$ stoji okomito i na $\vec{\omega}$ i na $\vec{r}$, i to po pravilu desne ruke za jednadžbu $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$. Usto, $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$ zatvaraju pravi kut, tako da je $v = \omega r$. Iz toga neposredno slijedi i veza za akceleraciju, $\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}}$, budući da su u slučaju ubrzavanja i kutna i tangencijalna akceleracija u smjeru pripadnih brzina, a u slučaju usporavanja su obje u suprotnom smjeru.

5.2 Jednoliko i jednoliko ubrzano kruženje

Jednoliko gibanje po kružnici

Definirano je konstantnim iznosom brzine. Opisuju ga relacije slične onima za jednoliko gibanje po pravcu:

$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= 0 \\ v &= konst. \\ s &= vt \end{aligned}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \omega &= konst. \\ \varphi &= \omega t + \varphi_0 \end{aligned}}$$

Konstantni iznos brzine ekvivalentan je tvrdnji da je tangencijalna akceleracija jednaka nuli. Kod linearnih veličina uobičajeno je računati samo pređeni put (a ne i položaj na kružnici). Početni položaj točke na kružnici (ili rotirajućeg radij-vektora) obično se opisuje početnim kutom $\varphi(0) \equiv \varphi_0$, dok kut $\varphi(t)$ (ili kraće samo φ) označava položaj u trenutku t.

Jednoliko gibanje po kružnici je periodično gibanje, tj. gibanje koje se pravilno ponavlja. *Period je najkraće vrijeme nakon kojega se neka periodična pojava počinje ponavljati* (označava se velikom slovom T); kod jednolikog gibanja po kružnici, period je vrijeme jednoga ophoda. *Frekvencija (ili učestalost) je broj perioda u jedinici vremena* $\boxed{f = 1/T}$; umjesto slova f često se upotrebljava i grčko slovo ni (ν), koje se slabo razlikuje od latiničnog slova "v" u kurzivu (v), pa ga zato ovdje nećemo koristiti.

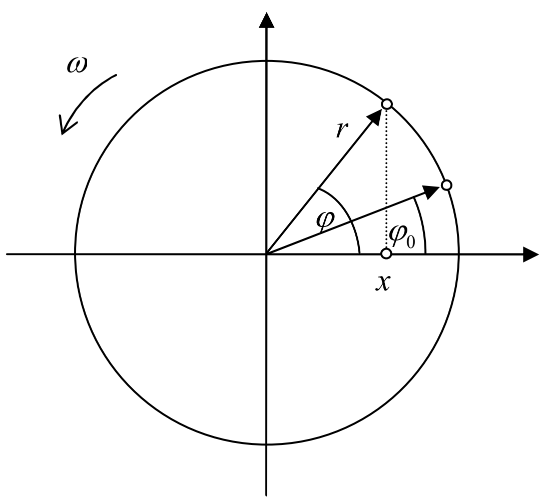
Konstantni iznos brzine može se uvijek računati kao omjer pređenoga puta i vremenskog intervala, a kod jednolikog gibanja po kružnici zgodno je za vremenski interval uzeti jedan period T. Tako se dobije nekoliko očiglednih relacija koje povezuju gore navedene veličine:

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r} \quad \text{gdje je} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}\,.$$

Jednoliko gibanje po kružnici često se koristi prilikom opisa različitih periodičnih pojava kod kojih se ne pojavljuje "stvarno" kruženje (npr. općenito kod harmoničkog titranja, a specijalno kod izmjeničnih napona i struja). Dok se r zakreće konstantnom brzinom ω tako da je $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (oba kuta mjerimo od osi *x*), projekcija njegova vrha na os *x* (koordinata $x = r \cos \varphi$) očito titra duž osi *x* kao:

$$\boxed{x = r \cos\ (\omega t + \varphi_0)}$$

Kad se koristi za opis titranja, veličina $\omega = 2\pi f$ naziva se kružnom frekvencijom, dok se $(\omega t + \varphi_0)$ naziva fazom, a sam φ_0 početnom fazom (ili faznim pomakom).



Slika 5.2. Veza između jednolikog kruženja i harmoničkog titranja

Jednoliko ubrzano gibanje po kružnici

Definirano je konstantnim iznosom tangencijalne odnosno kutne akceleracije, a izrazi koji ga opisuju analogni su onima za jednoliko ubrzano gibanje po pravcu:

$a_t = konst.$ $v = a_t t + v_0$ $s = \dfrac{a_t}{2} t^2 + v_0 t$	ili	$\alpha = konst.$ $\omega = \alpha t + \omega_0$ $\varphi = \dfrac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

Kod linearnih veličina (lijevi okvir), očigledna razlika u odnosu na gibanje po pravcu je a_t umjesto a. Naravno, i kod pravca se zapravo radi o tangencijalnoj akceleraciji jer samo ona određuje iznos brzine, ali je na pravcu $a = a_t$, pa to nije potrebno (ni uobičajeno) isticati.

5.3 Centripetalno ubrzanje i centripetalna sila

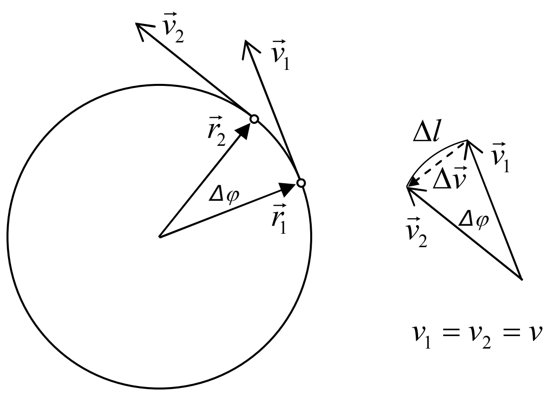
Gibanje po kružnici je najjednostavniji slučaj gibanja po krivulji, pa se tu najlakše izračuna normalno ubrzanje, za koje se na kružnici iz očiglednih razloga češće koristi naziv centripetalno (= prema središtu) ili radijalno ubrzanje.

Izvod centripetalne akceleracije dodatno se pojednostavnjuje ako promatramo jednoliko gibanje po kružnici, jer se tada ukupna promjena brzine sastoji samo od promjene smjera. U vremenskom intervalu Δt zakrene se radijus (a i na njega okomita brzina) za kut $\Delta\varphi$. Promjena brzine $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ je tetiva luka $\Delta l = v\Delta\varphi$ (desna strana Slike 5.3), pa će u limesu $\Delta t \rightarrow 0$ biti jednakog iznosa. Zato je:

$$a_{cp} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = v\frac{d\varphi}{dt} = v\omega$$

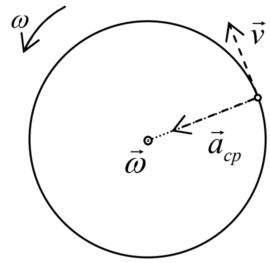
Koristeći vezu $v = \omega r$, možemo izraz za iznos centripetalne akceleracije pisati na više načina:

$$\boxed{a_{cp} = v\omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$



Slika 5.3. Izvod centripetalnog ubrzanja

Smjer vektora $\vec{a}_{cp}$ očito je okomit na $\vec{v}$, u suprotnom smjeru od $\vec{r}$, dakle prema središtu kružnice (zamislite na kružnici sa Slike 5.3 granični prijelaz $\Delta\varphi \to 0$). Nije teško provjeriti iz pravila vektorskog množenja (skica desno) da se centripetalna akceleracija može zapisati i kao



$$\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times \vec{v} .$$

Iako je izvod za centripetalnu akceleraciju proveden na primjeru jednolikog gibanja po kružnici, isti se rezultat dobije i kad brzina nije konstantng iznosa. Umjesto dodatnim crtežima, pokazat ćemo to korištenjem vektorskog računa. Izračunajmo ukupnu akceleraciju deriviranjem[28] brzine u obliku $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} &= \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{v} \\ \vec{a} &= \quad \vec{a}_t \quad + \quad \vec{a}_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}$$

Dobiveni izraz za normalnu (centripetalnu) akceleraciju slijedi iz jednoznačnosti rastava ukupne akceleracije na tangencijalnu i normalnu komponentu: budući da smo u rezultatu deriviranja prvi pribrojnik prepoznali kao $\vec{a}_t$, dugi mora biti $\vec{a}_n$.

Da bi tijelo dobijalo centripetalnu akceleraciju, mora na njega djelovati – prema središtu kružnice po kojoj se giba – sila koja se naziva *centripetalnom silom*. Taj naziv *ne* opisuje porijeklo (vrstu) sile, nego njezinu funkciju. Kod satelita koji kruži oko Zemlje, funkciju centripetalne sile ima Zemljina gravitacijska sila. Kod automobila koji se giba u zavoju horizontalne ceste tu funkciju vrši sila trenja. Kad kamen svežemo užetom, pa ga vrtimo u horizontalnoj ravnini, funkciju centripetalne sile ima komponenta napetosti užeta koja ga vuče prema središtu kružnice. U svakom slučaju kad se tijelo giba po kružnici na njega djeluje sila (ili komponenta ukupne sile) $\vec{F}_{cp}$ usmjerena prema središtu kružnice, koja iznosi

$$F_{cp} = ma_{cp} = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \quad .$$

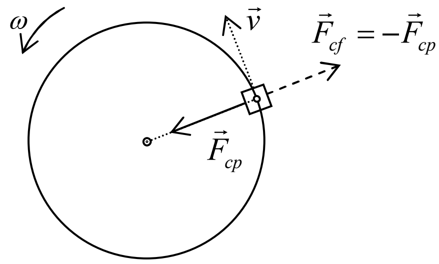
5.4 Centrifugalna sila

Međutim, promatrač koji se nalazi u sustavu koji se giba po kružnici (kao što je npr. automobil u zavoju, ili stolica na ringišpilu) osjeća i inercijalnu silu koja na sva tijela u sustavu djeluje u suprotnom smjeru od akceleracije sustava. To je centrifugalna sila $\vec{F}_{cf} = -m\vec{a}_{cp}$, po iznosu jednaka centripetalnoj sili. Ako promatrač miruje u

---

[28] Deriviranje vektorskog produkta provodi se kao i kod produkta skalarnih funkcija (osim što treba zadržati redoslijed faktora zbog antikomutativnosti) budući da se vektorski produkt može prikazati kao suma produkata skalarnih komponenata (i jediničnih vektora koji su konstantni).

odnosu na sustav (čovjek sjedi u stolici ringišpila), on će reći da se centrifugalna sila (koja ga vuče van) i centripetalna sila (kojom ga stolica gura prema središtu kružnice) poništavaju.



Naravno, ako gledamo izvana (stojimo pored ringišpila), centrifugalna sila uopće ne postoji. Na čovjeka djeluje samo centripetalna sila (kojom ga stolica gura prema osi vrtnje) koja mu skreće brzinu u smjeru kruženja. Ako bismo presjekli uže kojim je stolica vezana za os vrtnje, čovjek ne bi odletio u suprotnom smjeru od osi vrtnje (kamo ga, prema njegovom osjećaju, vuče centrifuga), nego bi se nastavio gibati po tangenti na kružnicu (zadržavajući smjer brzine prema zakonu inercije).[29]

No, ovakvo tumačenje iz vanjskog, inercijalnog, sustava nimalo ne umanjuje realnost centrifugalne sile u rotirajućem sustavu. To ćemo najbolje razumjeti ako imamo na umu da se mi (svi ljudi vezani uz površinu Zemlje) nalazimo u jednom takvom rotirajućem sustavu (doduše, s malom kutnom brzinom, jedan okretaj na dan), pa nam je težina manja od Zemljine gravitacijske sile upravo onoliko koliko nas centrifuga vuče od Zemljine osi prema van – što se najjače opaža na ekvatoru (detaljnije u poglavlju o gravitaciji).

[29] Ovdje smo izostavili učinak Zemljine gravitacije. Možete zamisliti da je ringišpil negdje u svemiru, ili dodati težinu i slobodan pad na prethodni opis.

6 Rad i energija

Ove se međusobno povezane fizikalne veličine vrlo često koriste i u fizici i izvan nje, ali u drugim područjima ponekad nisu jasno definirane, pa njihova upotreba u svakodnevnom životu ne mora biti usklađena sa točnim fizikalnim značenjem.

Sadržaj i značenje pojma energije izgrađivani su u fizici postupno tijekom prošlih stoljeća. Teorijska je fizika pokazala kako je zakon očuvanja energije povezan sa svojstvom homogenosti vremena, te da se i sam pojam energije može definirati na temelju načelne analize jednadžbi gibanja i s njima povezanih konstanti.

Polazeći od toga, rad bi se mogao lako definirati kao proces razmjene energije. No takav pristup ne bi bio nimalo intuitivan niti primjeren predznanju studenata, pa se ne koristi u uvodnim kolegijima fizike. Umjesto toga, ovdje najprije definiramo pojam rada, na kojemu se pojam energije izgrađuje kroz primjenu definicije rada.

6.1 Rad

Rad ćemo definirati kao rad sile, koja se u općem slučaju može proizvoljno mijenjati tokom vršenja rada. Definicija bi se riječima mogla formulirati ovako:

Rad sile je integral skalarne tangencijalne komponente sile po putu njezinog hvatišta.

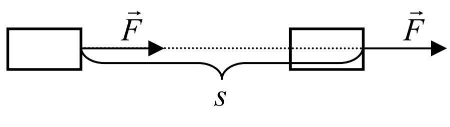
No, preglednije je definiciju napisati u obliku formule. Ispred formule dodana je opisna rečenica samo kao uvodno iznošenje pojmova (ili ustupak tradiciji iz brojnih udžbenika), bez pretenzije da bi ona samostalno mogla imati neki jasan smisao (a kamoli značaj definicije):

Rad promjenjljive sile:

Rad je djelovanje sile na nekom putu: $W_{s(A,B)}^{\vec{F}} = \int_A^B F \cos\alpha \; ds$.

Sam simbol W je oznaka za rad, a simbol $W_{s(AB)}^{\vec{F}}$ za rad sile $\vec{F}$ na putu od A do B. Simbol $s(A,B)$ označava *put hvatišta sile* $\vec{F}$ od točke A do točke B (a pod integralom je diferencijal toga puta, ds). Kut α je kut između sile i brzine hvatišta sile, simbolički: $\alpha = \sphericalangle(\vec{F},\vec{v})$.

Najlakše je razumjeti pojam rada u slučaju kada konstantna sila vuče tijelo u smjeru svojega djelovanja (skica desno). Tada se rad jednostavno računa kao umnožak sile i puta: $W = Fs$.

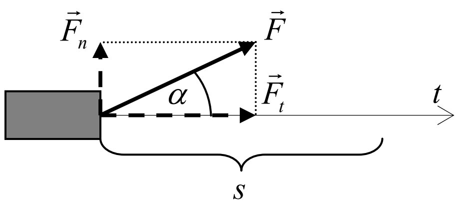


Npr. ako sila od 5N vuče tijelo na putu od 3m, ona izvrši rad W = 5N·3m = 15J. Očito, SI jedinica za rad, džul (J), je kratica za produkt "Nm". Ista jednostavna formula za rad može se koristiti i uz nešto manje restriktivne zahtjeve. Točnije:

Rad sile je umnožak iznosa sile i puta hvatišta sile, ako sila ima konstantan iznos a njezino hvatište se giba u smjeru djelovanja sile.

Potrebno je uočiti da već i ova jednostavna definicija rada, ograničena na specijalne okolnosti, ne mora biti posve podudarna sa svakodnevnim intuitivnim poimanjem rada: ključni fizikalni zahtjev je gibanje hvatišta u smjeru djelovanja sile. Primjerice, ma kako jako i dugo gurali neki zid, ako se on ne pomakne (i ne ošteti), sila kojom smo djelovali nije izvršila rad. Također, dok konstantnom brzinom nosimo vreću cementa na istoj visini, ne vršimo nikakav rad, jer tada na nju djelujemo silom samo uvis (pridržavamo težinu) a vreća se duž vertikalnog pravca uopće ne giba.

Zato u općenitijem slučaju, kad sila ne djeluje u smjeru gibanja, rastavljamo silu na tangencijalnu i normalnu komponentu. Npr. Slika 5.1 mogla bi prikazivati neki (mali) vagon koji se giba po tračnicama (pogled odozgo) dok ga vučemo silom $\vec{F}$ hodajući pored pruge (da se ne bismo saplitali o pragove):



Slika 6.1. Sila nije u smjeru gibanja

U prikazanom primjeru samo tangencijalna komponenta $\vec{F}_t$ utječe na gibanje vagona i vrši rad, dok normalna komponenta $\vec{F}_n$ nema nikakvog učinka jer joj se supotstavlja reakcija tračnica, pa ne vrši nikakav rad (kao da guramo zid).

No, isti zaključak o radu tih dviju komponenata vrijedi i u općem, manje intuitivnom slučaju, kod gibanja po krivulji. Naime, po definiciji je:

$W^{\vec{F}_n} = 0$,

budući da je, za normalnu silu, $\cos\alpha$ u integralu rada jednak nuli. Čime je motivirana takva definicija? Iako pri gibanju po krivulji normalna komponenta sile utječe na gibanje, ona mijenja samo smjer brzine a ne i njezin iznos. Zato ona ne mijenja energiju tijela, a bez toga nema rada. Iz toga slijedi da je rad svake sile jednak radu samo njezine tangencijalne komponente: $W^{\vec{F}} = W^{\vec{F}_t}$.

Usto, rad će biti pozitivan ako sila povećava brzinu tijela (a time i njegovu energiju), a negativan ako je umanjuje. Zato tangentu orijentiramo u smjeru brzine hvatišta sile, pa umjesto vektorske komponente $\vec{F}_t$ promatramo skalarnu komponentu sile $F_t = F\cos\alpha$ duž te tangente (da dobijemo dobar predznak rada).

U specijalnom slučaju $F_t = konst.$, imamo: $W^{\vec{F}} = F_t s = Fs\cos\alpha$.

Da bismo došli do opće formule za rad sile, s početka ovog poglavlja, preostaje samo još razmotriti slučaj kada se skalarna tangencijalna komponenta sile mijenja. Tada promatrani put s od točke A do točke B razdijelimo na sitne dijelove Δs_i ($i = 1,2,3,...n$), na svakom intervalu odaberemo neku vrijednost sile F_{t_i}, zbrojimo produkte $F_{t_i}\Delta s_i$, te provedemo granični prijelaz takvim usitnjavanjem intervala da svaki Δs_i teži k nuli (detaljniji opis u Poglavlju 1):

$$W^{\vec{F}}_{s(A,B)} = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum \underbrace{F_{t_i}\Delta s_i}_{\Delta W_i} = \int_A^B F_t ds = \int_A^B \underbrace{F\cos\alpha\ ds}_{dW} .$$

Umjesto cijele sume, odnosno integrala rada, u nekim analizama jednostavnije je promatrati samo jedan pribrojnik ΔW_i, odnosno diferencijal rada dW . Radi preglednosti, u gornjem su izrazu naznačeni grafički.

Kod računanja rada i veličina koje su s njim povezane, ponekad je zgodno koristiti pojam skalaranog produkta vektora. Po definiciji, skalarni produkt (ili "in" produkt) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, gdje je α kut između tih vektora. Obilježava se pomoću točke između vektora, npr. $\vec{a}\cdot\vec{b}$, i predstavlja umnožak iznosa jednog vektora (npr. $|\vec{a}|$) i na njega projiciranog drugog vektora (npr. $|\vec{b}|\cos\alpha$), pri čemu je redoslijed vektora nevažan (komutativnost).

Rad vrši samo tangencijalna komponenta sile, tj. projekcija sile na pravac brzine $\vec{v}$ hvatišta sile, odnosno na pravac diferencijalnog pomaka $d\vec{r}$, pa se definicija skalarnog produkta može iskoristiti za alternativni zapis diferencijala rada:

$$dW^{\vec{F}} = F\cos\alpha\ ds = \vec{F}\cdot d\vec{r} .$$

No, budući da je $ds = vdt$, odnosno $d\vec{r} = \vec{v}dt$, može se pisati i:

$$dW^{\vec{F}} = F\cos\alpha\ vdt = \vec{F}\cdot\vec{v}dt .$$

6.2 Snaga

U mnogim procesima rad se vrši jednoliko, npr. tako da se svake sekunde izvrši rad od 500J. Tada se snaga može računati kao omjer rada i vremena, i u spomenutom primjeru iznosi 500W (očito, W=J/s).

No, u općem slučaju, kad se rad vrši nejednoliko, treba u tome omjeru provesti granični prijelaz $\Delta t \to 0$, pa se dobija derivacija:

Snaga je brzina vršenja rada: $P = \dfrac{dW}{dt}$.

Budući da vršenje rada možemo opisati i kao prenošenje energije, može se reći i da je snaga brzina prijenosa energije.

U slučaju da samo jedna sila vrši rad u promatranom procesu, možemo u gornju derivaciju uvrstiti diferencijal rada $dW^{\vec{F}} = F\cos\alpha\ ds = \vec{F}\cdot d\vec{r}$, iz čega očito proizlazi:

Snaga sile $\vec{F}$: $\boxed{P^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot d\vec{v} = Fv\cos\alpha}$.

Iz toga se jasno vidi da će npr. motor koji radi maksimalnom snagom, automobilu davati dvostruko veće ubrzanje pri dvostruko manjoj brzini.

6.3 Pojam energije i zakon očuvanja

U okvirima klasične mehanike, pojam energije može se definirati na temelju rada:

Energija je sposobnost vršenja rada. Tijelo ima onoliko energije koliko rada može izvršiti.

Iz takve definicije može se, recipročno, rad opisati pomoću energije:

Rad je prenošenje energije s jednoga tijela na drugo, ili iz jednog sustava u drugi.

Primjerice, ako izvršimo rad od 4J kad biljarskim štapom pokrenemo mirnu biljarsku kuglu, ona će dobiti energiju od 4J. Ako ona potom centralno pogodi istu takvu mirnu kuglu, njoj će predati svu tu energiju, vršeći rad od 4J, a sama će se zaustaviti.

Polazeći od takve predodžbe, da uloženi rad ostaje sačuvan u tijelu u obliku energije, a tijelo potom može (vršeći rad) predati tu energiju dalje, dolazimo do koncepta očuvanja: energija ne može nestati niti nastati ni iz čega, nego se samo prenosi od jednog tijela ili sustava do drugoga, ili pretvara iz jednog oblika u drugi. Ukratko:

Zakon očuvanja energije
U izoliranom sustavu ukupna količina energije je konstantna.

Fizikalni pojam energije razvijao se (i u klasičnoj mehanici, a i izvan nje) ponajviše na temelju toga zakona očuvanja. Osnovna značajka energije bila je da je to skalarna fizikalna veličina koja ostaje očuvana tijekom proizvoljnih promjena unutar izoliranog sustava.[30]

[30] A daljnja teorijska razmatranja vezuju tu značajku za homogenost vremena odnosno za nepromjenjljivost fizikalnih zakona u vremenu.

Zato je i toplina uvrštena u energiju kad je Joule ustanovio da se mehanički rad može pretvoriti u toplinu, iako je to degradirani oblik energije koji se ne može u cijelosti natrag pretvoriti u rad. (Tek naknadno je otkriveno da se toplina sastoji od kinetičke i potencijalne energije unutrašnjeg gibanja i međudjelovanja čestica).

Kasnije je Einsteinova relativistička fizika otkrila ekvivalentnost energije i mase, što je dovelo do općenitijeg zakona očuvanja. (Usto, treba još uzeti u obzir da su energija i količina gibanja povezane u jedinstvenu fizikalnu veličinu, tzv. četiri-vektor u vremensko-prostornom kontinuumu).

No, ovdje ćemo razmotriti samo osnovne oblike klasične mehaničke energije, kinetičku i potencijalnu (na koje se, na mikroskopskoj skali, mogu svoditi i drugi oblici energije).

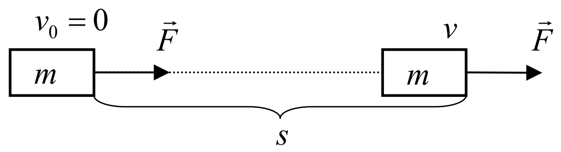
6.4 Kinetička energija

Kinetička energija je energija koju tijelo ima zbog svojega gibanja.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \text{, za } v << c$$

Navedena formula vrijedi samo za brzine puno manje od brzine svjetlosti, i za translacijsko gibanje tijela. Ako se tijelo proizvoljno giba, za brzinu treba uzeti brzinu centra masa da se dobije translacijski dio kinetičke energije, i na nju treba dodati kinetičku energiju rotacije oko centra masa (koja se opisuje u idućem poglavlju).

Kako se dođe do te formule, lako se vidi iz jednostavne ilustracije na Slici 5.3. Zamislimo da neko tijelo, koje je mirovalo u nekom sustavu gdje na njega ne djeluju nikakve druge sile, počnemo vući konstantnom silom po pravcu i ubrzamo do brzine v. Tijelo u prvom položaju nije imalo energije, a u drugom ima kinetičku energiju jednaku radu koji smo uložili na putu s :



Slika 6.2.

$$E_k = W_{ulož} = Fs = (ma)(\frac{a}{2}t^2) = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \text{, jer je } F = ma \text{, } s = \frac{a}{2}t^2 \text{, te } v = at .$$

U općem slučaju možemo zbrojiti radove svih sila $\vec{F}_i$ ($i = 1,2,...n$) koje djeluju na tijelo koje se proizvoljno giba po nekoj putanji, a radove računamo na dijelu $s(1,2)$ te putanje od neke točke 1 do točke 2. Tako dobijamo

Zakon promjene kinetičke energije

Suma radova svih sila koje djeluju na kruto tijelo jednaka je promjeni kinetičke energije tijela:

$$\sum W_i = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Da bismo to dokazali bez računanja rotacijske kinetičke energije, moramo postaviti ograničenje da je gibanje translacijsko (tako da hvatišta svih sila prelaze jednake puteve), ili promatrati česticu zanemarivih dimenzija (čime se ostvaruje isti zahtjev jednakih puteva, odnosno eliminira razmatranje rotacije).[31] Tada imamo:

$$\sum W_{s(1,2)}^{\vec{F}_i} = \int_1^2 (\sum F_{t_i}) ds = \int_1^2 m a_t ds = m \int_1^2 \frac{dv}{dt} v dt = m \int_1^2 v dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^2 = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} \ .$$

U prvom koraku sumiranje unosimo ispod integrala (linearnost integriranja), zatim sumu sila na tijelo zamijenimo s masa×akceleracija (tangencijalne komponente), pa zamijenimo a_t s derivacijom iznosa brzine, i još $ds \to vdt$ (jer $v = ds/dt$), te kratimo dt, integriramo po v, i dokaz je gotov.

6.5 Potencijalna energija

Kamen na nekoj visini iznad površine Zemlje (ili voda u akumulacijskom jezeru hidroelektrane) može početi padati prema tlu. Na tom putu Zemljina gravitacija će ga ubrzavati, tj. vršiti rad dajući mu kinetičku energiju (koju on može trošiti na daljnje vršenje rada).

Budući da će isti kamen koji padne sa iste visine uvijek dobiti istu kinetičku energiju, zgodnije je isključiti iz razmatranja detalje procesa u kojemu gravitacija vrši rad na njemu, te smatrati da je kamen već na toj visini imao istu tu količinu energije, samo u drugom obliku. Taj oblik je nazvan *potencijalnom energijom*, u vrijeme kad se na nju gledalo kao na potencijalnu mogućnost dobivanja rada. Danas nju smatramo ključnim sastojkom koncepta energije, bez kojega ne bi bilo pravog zakona očuvanja energije.

No, ne smijemo zaboraviti da računanje s potencijalnom energijom uključuje, u navedenom primjeru, rad gravitacijske sile na tijelu: zato taj rad ne možemo istovremeno uračunavati i među radove drugih vanjskih sila koje djeluju na tijelo. U kontekstu zakona o promjeni kinetičke energije, to znači da iz sume radova svih sila treba izdvojiti rad težine, tj.

$$\sum W_{s(1,2)}^{\vec{F}_i} = \sum W_{s(1,2)}^{\vec{F}_i bez \vec{G}} + W_{s(1,2)}^{\vec{G}} = \Delta E_k \ ,$$

[31] Slučaj rotacije tijela razmatra se u idućem poglavlju. No, nije potrebno ponovo dokazivati zakon o promjeni kinetičke energije, jer tijelo možemo gledati kao sustav čestica za koje (pojedinačno) zakon vrijedi,a prilikom zbrajanja se poništavaju radovi unutrašnjih sila u krutom tijelu.

i potom ga obračunati kao negativnu promjenu potencijalne energije

$W_{s(1,2)}^{\vec{G}} = -\Delta E_p$,

koju ćemo prebaciti na drugu stranu jednadžbe (pored ΔE_k), nakon čega dobijamo

$\sum W_{s(1,2)}^{\vec{F}_i bez \vec{G}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$,

gdje je $E = E_k + E_p$ ukupna mehanička energija tijela. Temeljem toga primjera, možemo zakon o promjeni kinetičke energije zamijeniti općenitijim zakonom:

Zakon o promjeni energije:

Promjena ukupne energije tijela ili sustava tijela jednaka je sumi radova vanjskih sila.

Ako nema vanjskih sila (ili je rad vanjskih sila nula), nema promjene energije. Tako u kontekstu ovog zakona dobijamo *zakon o očuvanju energije* kao njegov specijalni slučaj (u izoliranom sustavu ukupna količina energije je konstantna).

No, pritom je ključna odrednica oba zakona da među "vanjske sile" ne ubrajamo one sile zbog kojih tijela imaju potencijalnu energiju – nego smatramo su one "uključene u sustav”.

U skladu s prethodnim razmatranjima, potencijalnu energiju tijela definiramo na slijedeći način (nisu uključena eventualna međudjelovanja čestica unutar tijela; ali se mogu uključiti ako u definiciji zamijenimo riječ "tijelo" sa "čestica" i zbrajamo po česticama):

Potencijalna energija je energija koju tijelo ima zbog svog položaja u polju konzervativnih sila.

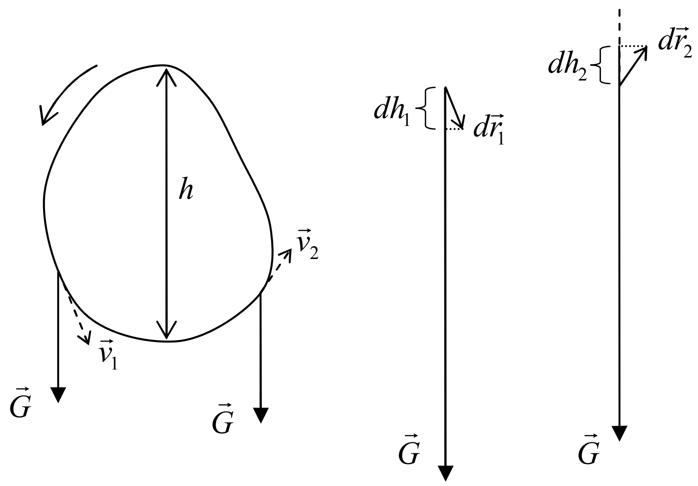
Sila je konzervativna ako je njezin rad po zatvorenom putu jednak nuli.

Polje sile možemo privremeno definirati kao prostor u kojemu se osjeća djelovanje te sile (preciznije ćemo ga definirati u poglavlju o gravitaciji).

Konzervativne sile, kao što su gravitacijska ili električna, daju tijelu potencijalnu energiju (gravitacijsku ili električnu) – tako da ta energija ovisi samo o položaju tijela u njihovom polju. Ako tijelo malo "prošetamo" pa ga vratimo natrag u istu točku (zatvoreni put), mora ono ponovo imati istu potencijalnu energiju. Zato je rad konzervativne sile na tom zatvorenom putu morao biti nula – inače bi mu se promijenila energija koja potječe od te sile (za iznos njezinoga rada). Takva sila, dakle, čuva (konzervira) njegovu energiju u toj točki.

Potencijalnom energijom ćemo se detaljnije baviti u narednim poglavljima. Ovdje ćemo samo kratko prikazati najjednostavniji slučaj: gravitacijsku potencijalnu energiju u blizini površine Zemlje.

To je, dakle, energija koju tijelo ima zbog svojega položaja (u ovom slučaju samo zbog visine) u prostoru gdje na njega djeluje težina $\vec{G} = m\vec{g}$. Pokažimo najprije da je težina konzervativna. Na lijevoj strani skice vidi se zatvoreni put. Općenito je $dW^{\vec{G}} = \vec{G} \cdot d\vec{r}$. Desno (i uvećano) vidimo da je taj skalarni produkt jednak:

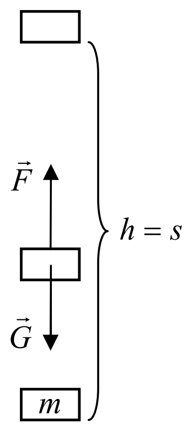


Gdh_1 kod spuštanja, te

$-Gdh_2$ kod dizanja,

zbog predznaka kosinusa kuta između $\vec{G}$ i $\vec{v}$. Kod integriranja po putu, G izvadimo ispred integrala, pa preostaje još "zbrojiti" komadiće dh . Tako za spuštanje dobijemo $W^{\vec{G}} = Gh$, a za dizanje $W^{\vec{G}} = -Gh$, bez obzira na oblik krivulje. Za ukupni zatvoreni put to daje $W^{\vec{G}} = 0$.

Sada pogledajmo koliki rad treba uložiti za podizanje tijela mase m na neku visinu h . Tijelo dižemo silom $\vec{F}$, zato što ga težina $G = mg$ vuče prema dolje. U položaju u kojemu su sile prikazane na skici, očito treba biti $F = G$ da bismo tijelo samo podizali, bez ubrzavanja. No, u donjem položaju trebala je malo veća sila $F > G$ da bismo tijelo pokrenuli (ubrzali). Koliko veća? Po volji malo (ako imamo vremena). Neka je npr. samo na prvih 1% ukupnog puta $s = h$ sila F bila za 2% veća od G . Ali zato, kad se približimo gornjem položaju, mora sila biti malo manja ($F < G$), da bi se tijelo zaustavilo točno na visini h (a ne da tamo ima još i neku kinetičku energiju). Koliko manja? Npr. za 2% manja na zadnjih 1% puta, da dobijemo usporavanje simetrično početnom ubrzanju.



Dakle, tijelo dižemo skoro cijelim putem upravo silom koja je točno jednaka težini. Samo je na početku malo veća, a na kraju isto toliko malo manja (i to volji malo, jer podizanje ne mora biti brzo). Stoga znamo da je prosječni iznos sile F na putu h točno jednak težini, pa rad koji ulažemo možemo računati jednostavnim množenjem:

$W_{ulož} = Fs = Gh = mgh$.

Taj uloženi rad podignuto tijelo sadrži u obliku potencijalne energije. Ako je u početnom, donjem položaju imalo potencijalnu energiju jednaku nuli, onda na visini h tijelo ima potencijalnu energiju

$$E_p = mgh\ .$$

No, na pitanje "gdje tijelo ima $E_p = 0$?", odgovor glasi: "tamo gdje se dogovorimo" (a pritom ćemo imati na umu praktične pogodnosti, npr. da to bude najniža razina do koje tijelo može pasti). Ono što mi zapravo opažamo (mjerimo, računamo) su samo razlike potencijalnih energija, jer su one jednake uloženom radu (ili radu koji možemo dobiti)

$$W_{ulož} = E_{p_2} - E_{p_1} = mgh$$

a te razlike *ne* ovise o tome gdje izaberemo nulu.

7 Rotacija

U slučaju proizvoljnoga gibanja tijela, pojedine njegove čestice mogu prelaziti različite puteve, te imati različite brzine i akceleracije. No, opis ukupnoga gibanja može se dramatično pojednostavniti kod krutog tijela, gdje je dovoljno promatrati gibanje samo jedne – bilo koje – čestice (točke) tijela, plus relativno gibanje ostalih čestica u odnosu na nju.[32] Budući da se kod krutog tijela udaljenost među česticama ne mijenja, to relativno gibanje može biti samo mirovanje, ili kružno gibanje oko te odabrane čestice ili drugih čestica koje miruju u odnosu na nju – tj. rotacija.

Sam pojam rotacije krutoga tijela intuitivno je toliko jasan (dio svakodnevnog iskustva) da nema potrebe uvoditi formalne matematičke definicije. Najjednostavniji je slučaj rotacija oko čvrste (nepomične) osi: pravac koji se naziva os rotacije miruje (on može, ali i ne mora prolaziti kroz tijelo), a sve točke (osim onih koje leže na osi) gibaju se po kružnicama oko te osi.[33]

Opis postaje malo složeniji ako se os translacijski giba, a puno složeniji ako usto os može i rotirati – čime se dobija najopćenitije gibanje krutog tijela. U slučaju da nema nepomične osi, dinamički opis gibanja je jednostavniji ako se rotacija promatra u odnosu na centar masa tijela.

Ovdje ćemo se uglavnom baviti rotacijom krutog tijela oko čvrste osi, jer je to slučaj koji se najčešće javlja u tehničkim primjenama. Kinematičke veličine kojima opisujemo takvu rotaciju očito se podudaraju s kutnim veličinama kojima smo opisivali gibanje po kružnici.

7.1 Moment sile

Za dinamički opis rotacije krutoga tijela nije dovoljno promatrati samo iznos i smjer sila koje na njega djeluju, nego moramo uzeti u obzir i položaj hvatišta sile (preciznije, treba poznavati i pravac na kojemu sila leži, a koji je zadan njezinim hvatištem i smjerom). Da bismo pojednostavnili izlaganje, pozivat ćemo se na svakodnevno iskustvo da zakretanje npr. poluge ovisi o fizikalnoj veličini "sila puta krak" koja se zove *moment sile*.

Općenitije, moment sile definira se za pojedinu silu u odnosu na proizvoljnu točku u prostoru:

Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na točku A je: $\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_{A\vec{F}} \times \vec{F}$.

[32] Formalno govoreći, to je prijelaz na referentni sustav vezan za odabranu česticu tijela.

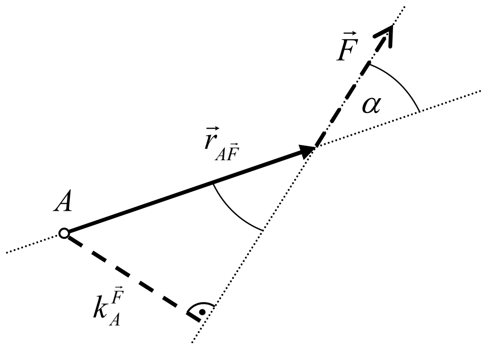
[33] Kružnice leže u ravninama okomitima na os, njihova središta su na osi, radijusi svih kružnica jednako se zakreću (isti ω i α).

To je vektorski produkt radij-vektora $\vec{r}_{A\vec{F}}$ hvatišta sile $\vec{F}$ u odnosu na točku A, i same sile $\vec{F}$ (Slika 7.1). Pravci na kojima leže $\vec{r}_{A\vec{F}}$ i $\vec{F}$ sijeku se u hvatištu sile, te definiraju ravninu Slike 7.1. Moment sile je vektor okomit na tu ravninu, te u slučaju sa Slike 7.1 gleda prema nama (pravilo desne ruke). Iznos momenta sile je $\boxed{M_A^{\vec{F}} = F\, r_{A\vec{F}} \sin\alpha}$, gdje kut α između $\vec{r}_{A\vec{F}}$ i $\vec{F}$ određujemo tako da zamislimo te vektore povučene iz iste točke (a tako je i označen na slici) te uzimamo manji kut među njima.

Iz pravokutnog trokuta kojemu je $r_{A\vec{F}}$ hipotenuza, lako uočavamo jednakost $r_{A\vec{F}} \sin\alpha = k_A^{\vec{F}}$, gdje je $k_A^{\vec{F}}$ krak sile $\vec{F}$ odnosu na točku A, tj. okomica iz točke A na pravac sile $\vec{F}$. Tako se *iznos* momenta sile svodi na pravilo iz zakona poluge, "sila puta krak":

$$\boxed{M_A^{\vec{F}} = F\, k_A^{\vec{F}}}.$$

Umjesto $r_{A\vec{F}}$ mogli smo uzeti bilo koji drugi radij-vektor od točke A do pravca sile: on bi se projicirao u isti krak sile, pa bismo dobili isti moment sile (a često je zgodno baš krak sile pretvoriti u radij-vektor).



Slika 7.1. Moment sile

Uočimo fizikalni smisao momenta sile $\vec{F}$ (na temelju iskustva s polugom): on opisuje kako ta sila pokušava zakrenuti svoj krak (ili radij-vektor hvatišta) oko točke A (koja kao da je učvršćena). Sila povlači drugi ("slobodni") kraj radij-vektora, tj. pokušava ga zarotirati u ravnini okomitoj na sam moment.

Ta predodžba pojednostavnjuje opis rotacije krutog tijela oko čvrste osi. Postavimo os *z* pravokutnog Kartezijevog sustava duž te čvrste osi, i negdje na njoj odaberimo ishodište sustava O. Moment sile sad ćemo računati u odnosu na točku O, pa će biti opisan vektorskim produktom $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (radi preglednosti, izostavljamo idekse za silu $\vec{F}$ i točku O). Njegova vektorska *z*-komponenta (vektor $\vec{M}_z$) pokušava zakrenuti tijelo oko osi *z* (jer je takvo rotiranje okomito na vektor $\vec{M}_z$), pa se pripadna skalarna komponenta M_z često naziva *momentom sile oko osi z*. Slično razmatranje vrijedi i za *x* i *y* komponentu momenta sile. No, one opisuju kako sila pokušava zakrenuti tijelo oko tih osi, što nije moguće jer bi se pritom morala zakrenuti i čvrsta os koja leži duž koordinatne osi *z*. Sile reakcije u ležajevima čvrste osi poništavaju djelovanje M_x i M_y, pa ih nije potrebno dalje razmatrati.

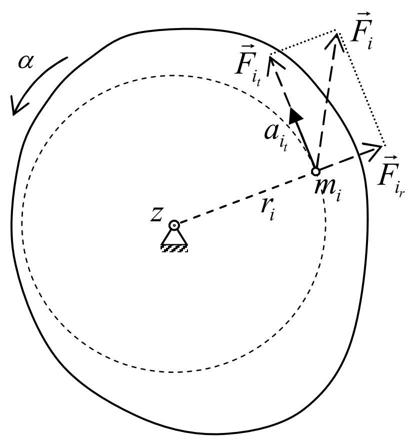
Opis momenta sile oko osi *z* (tj. skalarne komponente M_z) može se dodatno pojednostavniti. U vektorskom produktu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, komponente radij-vektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ su koordinate hvatišta sile, a sama sila je $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$.

Prema pravilu distribucije ("svaki sa svakim"), njihov vektorski produkt dobija se vektorskim množenjem $(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\times(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})$. Pri tome, produkt dvaju jediničnih vektora leži na onoj preostaloj (trećoj) koordinatnoj osi.[34] Iz toga zaključujemo da se *z*-komponenta momenta $\vec{M}$ zapravo računa samo pomoću *x* i *y* komponenata sile i radij-vektora, tj. pomoću vektora $\vec{r}_{xy}=x\vec{i}+y\vec{j}$ i $\vec{F}_{xy}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$ koji leže u koordinatnoj ravnini *x*,*y* okomitoj na os *z*, odakle izravno[35] dobijamo $\vec{M}_z=(xF_y-yF_x)\,\vec{k}$.

No, nije doista potrebno koristiti navedene *x* i *y* komponente sile za izračun njenog momenta oko osi *z*, jer vektor $\vec{r}_{xy}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ima smjer od osi *z* do hvatišta sile. On mjeri udaljenost hvatišta sile od osi, koja iznosi $r_{xy}=\sqrt{x^2+y^2}$ (na Slici 7.2 označena je kao r_i). Zato silu $\vec{F}_{xy}$ rastavljamo na radijalnu komponentu $\vec{F}_r$ koja siječe os *z* (pa nema momenta oko nje), i tangencijalnu komponentu $\vec{F}_t$ koja daje ukupni moment sile $\vec{F}$ oko osi *z*: $\boxed{M_z=F_t r_{xy}}$.

7.2 Dinamika rotacije oko čvrste osi

Nepomičnu (čvrstu) osovinu oko koje tijelo može rotirati označimo uobičajenim simbolom (trokutić sa "uzemljenjem"), kao i koordinatnu os z usmjerenu prema nama (simbol: vrh strelice), Slika 7.2. Tijelo se sastoji od čestica: na udaljenosti r_i od osi z vidimo česticu mase m_i koja će se gibati po naznačenoj kružnici prilikom rotacije tijela. Na česticu djeluje ukupna sila $\vec{F}_i$, ali samo tangencijalna komponenta $\vec{F}_{i_t}$ utječe na gibanje, jer se čestica ne može udaljiti od čvrste osi (u smjeru eventualne radijalne komponente $\vec{F}_{i_r}$). Iz sličnih razloga nije potrebno razmatrati ni eventualnu z-komponentu sile (nema je na slici), jer pretpostavljamo da ona ne može tijelo skinuti s osovine. Ukratko, čestica može dobiti samo tangencijalnu akceleraciju, pa za nju drugi Newtonov aksiom ima oblik $F_{i_t}=m_i a_{i_t}=m_i r_i\alpha$.



Slika 7.2. Rotacija oko z osi

---

[34] Specijalno, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ je zapravo definicija uobičajenog, tzv. desnog pravokutnog Kartezijevog sustava.

[35] Od umnožaka komponenata $(x\vec{i}+y\vec{j})\times(F_x\vec{i}+F_y\vec{j})=xF_x(\vec{i}\times\vec{i})+xF_y(\vec{i}\times\vec{j})+yF_x(\vec{j}\times\vec{i})+yF_y(\vec{j}\times\vec{j})$ ostaju samo produkti $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ te $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, jer vektorski produkti vektora sa samim sobom daju nulu.

Tu smo tangencijalnu akceleraciju prikazali pomoću kutne akceleracije α (koja je jednaka za sve čestice pa zato nema indeksa i). Množenjem dobivene relacije sa r_i i sumiranjem po svim česticama m_i promatanog tijela dobijamo:

$$\sum F_{t_i} r_i = \alpha \sum m_i r_i^2 \ .$$

Na lijevoj strani dobili smo sumu momenata sila oko osi z za sve sile koje djeluju na sve čestice tijela. Među njima su i unutrašnje sile (akcije i reakcije) kojima se momenti poništavaju jer djeluju na istom pravcu među susjednim česticama, pa preostaju samo momenti sila koje izvana djeluju na tijelo – označimo ih kao M_{zi} .

Na desnoj strani gornje jednadžbe kutnu akceleraciju množi suma koja se naziva *momentom inercije* tijela oko osi z i označava sa I_z . Tako smo dobili:

Temeljni zakon gibanja za rotaciju oko čvrste osi

$$\boxed{\sum M_{zi} = I_z \alpha}$$

gdje je

Moment inercije ili tromosti oko osi z

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm}$$

Zbrajanje po praktično točkastim česticama tijela ekvivalentno je integriranju po diferencijalnim komadićima mase, koje je prikladinje za stvarni račun (kako će se vidjeti na kasnijem primjeru).

Temeljni zakon gibanja za rotaciju oko čvrste osi po svojem je obliku ekvivalentan drugom Newtonovom zakonu (pa ga neki nazivaju drugim Newtonovim zakonom za rotaciju):

$$\sum M_{zi} = I_z \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

(umjesto sile – moment sile; umjeto mase ili tromosti – moment tromosti; umjesto akceleracije – kutna akceleracija).

Sjetimo se, međutim, da je drugi Newtonov aksiom zapravo *zakon o promjeni količine gibanja*, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (gdje je $\vec{p}$ produkt mase i brzine). Za rotaciju krutog tijela oko čvrste osi može se analogno definirati *moment količine gibanja* kao produkt momenta tromosti i kutne brzine. Tada se vidi da je temeljni zakon gibanja za takvu rotaciju zapravo *zakon o promjeni momenta količine gibanja*:

Moment količine gibanja za rotaciju oko čvrste osi z

$$\boxed{L_z = I_z \omega}$$

Zakon o promjeni momenta količine gibanja

$$\boxed{\sum M_{zi} = I_z \alpha = I_z \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = \frac{dL_z}{dt}}$$

Ili, riječima: *Brzina promjene momenta količine gibanja tijela jedanaka je sumi momenata sila koje na tijelo djeluju*.

7.3 Očuvanje momenta količine gibanja

Ako se iz prethodne rečenice izbace "momenti", ostaje doslovno drugi Newtonov aksiom. Analogija potječe od zakona gibanja za materijalnu česticu. Za česticu zanemarivih dimenzija, i količine gibanja $\vec{p} = m\vec{v}$, definira se moment količine gibanja u odnosu na neku točku kao $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$, gdje je $\vec{r}$ radij-vektor čestice u odnosu na tu točku. Deriviranjem po vremenu dobijamo zakon o promjeni momenta količine gibanja, posve analogan drugom Newtonovom aksiomu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}^{F} .$$

Tu smo uočili da se produkt $\vec{v} \times \vec{p}$ poništava jer su vektori $\vec{v}$ i $\vec{p}$ paralelni, te da je $d\vec{p}/dt$ jednako ukupnoj sili $\vec{F}$ koja djeluje na česticu, a moment sile $\vec{M}^{F}$ računa se u odnosu na istu točku kao i $\vec{L}$.

Ako dobiveni zakon gibanja za česticu primijenimo na tijelo koje se proizvoljno giba (nema čvrste osi rotacije), zbrajanjem (integriranjem) po njegovim česticama, dobiju se dosta komplicirane jednadžbe gibanja (tzv. Eulerove jednadžbe), u kojima se umjesto momenta inercije pojavljuju komponente tenzora inercije (tenzor drugog reda).

No, kod rotacije oko čvrste osi to se zbrajanje pojednostavnjuje (razmatranjem kakvo je provedeno za Sliku 7.2), te se dobija već navedeni zakon gibanja:

$$\sum M_{zi} = \frac{dL_z}{dt}, \text{ gdje je } L_z = I_z\omega .$$

Moment količine gibanja je veličina koja kod rotacijskog gibanja ima sličnu ulogu i značaj kao što količina gibanja ima kod translacije. Specijalno, iz opisanih slučajeva vidimo da vrijedi analogan zakon očuvanja:

U izoliranom sustavu, ukupni moment količine gibanja je konstantan.

Zapravo, iz gornjeg izraza vidimo da nije nužna potpuna izoliranost, već je dosta da suma momenata sila u odnosu na nepomičnu os bude jednaka nuli. Kada klizačica radi piruetu, nepomičnu os z definira vertikala kroz vrh klizaljke na kojoj stoji. Skupljanjem ruku uz tu os, ona smanjuje svoj moment tromosti I_z (manja udaljenost mase od osi). Da bi L_z ostao isti, povećat će joj se brzina vrtnje, što je i svrha takve figure.

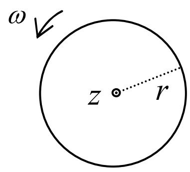
Može se pokazati da isti izraz vrijedi i za rotaciju Zemlje, pa nam zato duljina dana ostaje približno ista. Neznatno varira zbog slijeganja tla u potresima ili podizanja izazvanog erupcijom vulkana (promjene I_z). Gravitacija okolnih tijela efektivno djeluje na centar masa, pa uglavnom nema momenta sile u odnosu na os rotacije.

Ipak, Zemlja nije savršeno kruta, pa plimni efekti od kruženja Mjeseca rezultiraju malim momentom koji rotaciju neznatno ali stalno usporava.

7.4 Momenti inercije

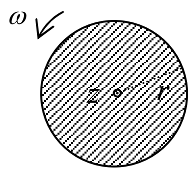
Za stvarni račun, potrebno je poznavati moment inercije tijela koje rotira oko čvrste osi. U tehničkim primjenama najčešće se pojavljuju pravilna tijela, pa ovdje za ilustraciju navodimo momente inercije nekoliko *homogenih simetričnih* tijela, u odnosu na os rotacije z kroz središte tijela (koje je ujedno i centar masa). Os je okomita na ravninu slike u prikazanoj ilustraciji:

tanki prsten ili
šuplji valjak



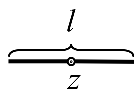
$$I_z = mr^2$$

homogeni valjak
ili kružna ploča



$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

tanki
homogeni štap



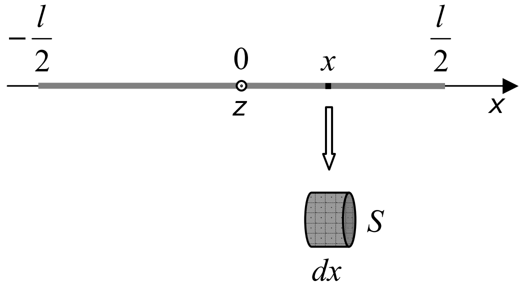
$$I_z = \frac{1}{12}ml^2$$

Moment inercije za tanki prsten vidi se neposredno iz definicije $I_z = \sum m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm$. Sve čestice m_i nalaze se na (približno) istoj udaljenosti r od osi rotacije, pa se r^2 može izlučiti iz sume produkata $m_i r_i^2$. Preostaje zbroj masa čestica, tj. ukupna masa tijela m.

Formule za homogeni valjak i tanki štap dobijaju se iz definicije integriranjem. Ovdje ćemo pokazati postupak za štap.

Neka štap duljine l leži duž osi x, na kojoj mu krajevi imaju koordinate $-l/2$ i $+l/2$. Štap ima neku malu debljinu, pa mu je površina poprečnog presjeka jednaka S (oblik nije važan).

Na mjestu x, kojemu je udaljenost od osi z jednaka $r = x$, uočimo vrlo kratki komadić štapa duljine dx, na skici uvećan i prikazan ispod štapa. (Uobičajeno je da oznaka dx podrazumijeva da je proveden granični prijelaz $\Delta x \to 0$, pa duljina komadića ne prelazi dimenziju točke označene koordinatom x.) Masa toga komadića je $dm = \rho\, dV = \rho\, Sdx$ (ρ je gustoća, a volumen je baza $\times$ visina).



Moment inercije štapa oko osi z je integral po cijeloj masi štapa:

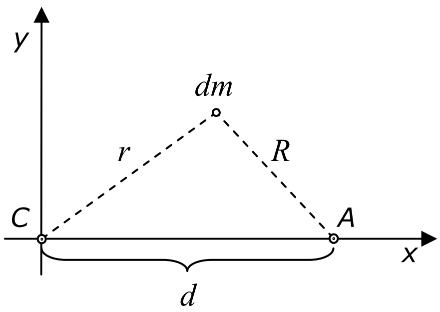
$$I_z = \int_m r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho\, Sdx = 2\rho\, S\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\rho\, S\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = 2\rho\, S\frac{\frac{l^3}{8}}{3} = \frac{1}{12}\rho(Sl)l^2 = \frac{1}{12}ml^2 .$$

Tu smo najprije zamijenili $r^2 \to x^2$ (što vrijedi i za negativne x), a potom izrazili dm pomoću dx, tako da su granice integriranja postali rubovi štapa na osi *x*. Zbog simetričnosti, mogli smo integral za cijeli štap zamijeniti dvostrukim integralom desne polovice štapa, a konstantnu gustoću (štap je homogen) i poprečni presjek smo izvukli ispred integrala. Na kraju smo uočili da je masa štapa $m = \rho\, V$, gdje je $V = Sl$.

Iz momenta inercije oko osi *z* koja prolazi kroz centar masa tijela C (gore navedeni primjeri), lako se izračuna moment inercije oko paralelne osi kroz bilo koju drugu točku (npr. oko osi *Z* kroz točku A na Slici 7.3). Prema *Steinerovom poučku o paralelnim osima*

$$\boxed{I_A = I_C + md^2}$$

gdje je m masa tijela, dok je d udaljenost između osi (koje nisu označene na slici), a momenti tromosti imaju oznake prema točkama kroz koje te osi prolaze.



Slika 7.3. Steinerov poučak

Čestica mase dm (udaljena za r od osi *z* koja ide kroz C, a za R od osi *Z* postavljene kroz A) ima u ravnini crteža koordinate (x, y). Zato je $r^2 = x^2 + y^2$, te $R^2 = (d-x)^2 + y^2 = d^2 - 2xd + x^2 + y^2 = r^2 - 2xd + d^2$, pa imamo

$$I_A = \int R^2 dm = \int r^2 dm - 2d\int x\, dm + d^2\int dm = I_C + md^2 ,$$

budući da je, prema definiciji centra masa, $\int x\, dm = mx_C$, a njegova je *x*-koordinata x_C ovdje jednaka nuli.

7.5 Rotacija i translacija

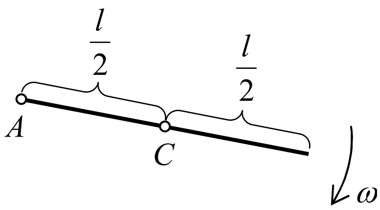
Sličnost opisa rotacije krutog tijela oko čvrste osi, i translacijskog gibanja, nije ograničena samo na temeljni zakon gibanja, nego vrijedi i za ostale dinamičke veličine. Dokaz se provodi analogno prethodnom izvodu vezanom uz Sliku 7.2, i toliko je jednostavan da ovdje navodimo samo rezultate za često korištene veličine:

Rad momenta sile	*Snaga momenta sile*	*Kinetička energija*
$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$	$P = M_z \omega$	$E_k = \frac{I_z \omega^2}{2}$

Izrazi za rotaciju oko čvrste osi mogu se koristiti i u slučaju kada tijelo koje rotira istovremeno izvodi i translacijsko gibanje, ali tako da mu se os rotacije *ne* zakreće (primjeri: pravocrtno kotrljanje, ili spužva kojom brišemo ploču). No, tada treba sve translacijske veličine računati za centar masa tijela, a rotacijske kao da tijelo rotira oko čvrste osi postavljene kroz centar masa.

Primjerice, ukupna kinetička energija tijela je: $\boxed{E_k = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}}$.

Umjesto općenitog dokaza, ilustrirati ćemo tu tvrdnju na slučaju štapa duljine l koji rotira kutnom brzinom ω oko osi okomite na ravninu skice (dolje). Zamislimo najprije da je to čvrsta os kroz točku A.
Ukupna kinetička energija štapa je



$$E_k = \frac{I_A \omega^2}{2} = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \omega^2}{2} .$$

Tu smo u drugom koraku primijenili Steinerovo pravilo, zato da bismo moment inercije I_A izrazili pomoću poznatog momenta inercije I_C oko paralelne osi kroz centar masa, $I_A = I_C + md^2$ (gdje je $d = l/2$).

Ali, mogli bismo zamisliti da se štap giba na upravo opisani način iako nema čvrste osovine kroz točku A (niti kroz bilo koju drugu točku), već se to gibanje ostvaruje djelovanjem nekog odgovarajućeg sustava sila.[36] Sad to isto gibanje možemo smatrati kombinacijom translacije (jer se "slobodno" premješta centar masa tijela) i rotacije (jer se štap zakreće kutnom brzinom ω), pa bi kinetičku energiju trebalo računati pomoću prethodne (uokvirene) formule. No, lako vidimo da je rezultat isti, tj. jednako dobro vrijede obadvije formule, jer u donjoj formuli možemo prepoznati $v_C = r\omega$ (uz $r = l/2$) kao brzinu centra masa koji kruži oko točke A.

---

[36] Uobičajeni misaoni zahvat u mehanici, naziva se "oslobađanje" tijela.

8 Gibanje u gravitacijskom polju

8.1 Newtonov opći zakon gravitacije

Svaka dva tijela privlače se zbog svojih masa gravitacijskom silom $F = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Tu su m_1 i m_2 mase tijela, a simbol G_N označava univerzalnu gravitacijsku konstantu[37] koja približno iznosi $G_N = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI jedinica[38]. Simbol r označava udaljenost između tijela ako su ona zanemarivih dimenzija, tj. između čestica. Zato se u formulaciji zakona gravitacije često koristi termin "čestice" umjesto "tijela" (što je i izvorna Newtonova formulacija). No, može se pokazati da kod kugli sa sferno-simetričnom raspodjelom mase, r točno odgovara udaljenosti od njihovih središta (što je dobra aproksimacija za planete i zvijezde). Također, za manja tijela na pristojnoj udaljenosti, može se udaljenost između njihovih centara mase uzeti kao dobra aproksimacija za r. No u općem slučaju, kod proizvoljno blizih i velikih tijela, nema posebnog pravila za r, nego se mora gravitacijska sila računati zbrajanjem (integriranjem) sila između njihovih malih dijelova (između sastavnih čestica; ili zamišljenom diobom tijela na vrlo male komadiće mase, volumena $\Delta V \to 0$).

Newton je opći zakon gravitacije objavio u istom djelu, *Principia*, kao i svoje aksiome, i zajedno ih primijenio na tumačenje Keplerovih empirijskih zakona o gibanju planeta.[39] Prije njihova vremena, ukupna fizikalna opažanja i predznanja zapravo i nisu bila dovoljna da bi se sila teža, koju osjećamo na Zemlji, dovela u vezu sa silom koja drži planete u orbitama oko Sunca, te da bi se odatle izvelo poopćenje o privlačnoj sili među svim tijelima u svemiru.

Zašto gravitacijska sila među svim tijelima nije očigledna? Zato što je vrlo mala među malim tijelima: dva čovjeka od po 100 kg na udaljenosti od 1 m (aproksimacija centara masa) privlače se silom od oko $6{,}67 \cdot 10^{-7}$ N, manje od milijuntinke njutna (desetak puta manje od težine jednog mg). Zato je prošlo više od stoljeća nakon Newtonovih *Principia* prije nego što je Cavendish 1798. godine prvi izmjerio gravitacijsku silu između dvaju tijela na Zemlji, što je omogućilo da se izračuna vrijednost gravitacijske konstante.[40]

---

[37] Često se koristi samo simbol G, što ovdje izbjegavamo jer je već upotrebljen za težinu tijela.

[38] Kod ovakvih konstanti (interakcije ili proporcionalnosti) nema potrebe eksplicitno navoditi jedinice (ako nije neki posebni skraćeni naziv), jer su one u SI sustavu odabrane tako da usklade lijevu i desnu stranu jednadžbe. Ovdje jedinica očito treba biti Nm^2/kg^2 (a može i drugačije ako se raspiše njutn) što je posve suvišno i pisati i pamtiti.

[39] Njegov je suvremenik Hook tvrdio da je on iste spoznaje opisivao nekoliko godina ranije od Newtona, što je samo djelomično točno, jer nije uočio da gravitacijska sila opada s kvadratom udaljenosti.

[40] Cavendish je koristio torzionu vagu sa dvije simetrično obješene metalne kugle, te usporedio silu kojom ih privlače dvije stacionarne kugle sa silom kojom ih privlači Zemlja. To mu je omogućilo da izračuna gustoću Zemlje, što je i bio cilj pokusa. Gravitacijska konstanta određena je znatno kasnije, na temelju njegovog rezultata za gustoću Zemlje.

Gravitacijsku silu među manjim tijelima najčešće daleko nadmašuje električna sila, opisana Coulombovim zakonom (za točkaste naboje Q_1 i Q_2 na udaljenosti r):

$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, gdje konstanta interakcije puno veća, i približno iznosi $k = 9 \cdot 10^9$ SI jedinica.

Ako su npr. čestice prašine samo jednostruko ionizirane (manjak ili višak jednog elektrona na svakoj), električna sila među njima je milijarde milijardi puta veća od gravitacijske. No, ako promatramo sve veća tijela, sve više prevladava gravitacijska sila, zato što se ionizacije uglavnom dešavaju površinskim procesima (a površina raste s kvadratom promjera, pa zaostaje za masom koja raste s kubom promjera).

Što je električni naboj? Očito se može definirati pomoću sile, tj. kao *svojstvo nekih vrsta elementarnih čestica* (npr. elektrona) *da međusobno djeluju Coulombovom silom* (dakako, naboj većih tijela uzrokovan je viškom ili manjkom elektrona).

Isto tako se i *masa* može definirati kao *svojstvo tijela da se međusobno privlače gravitacijskom silom*. No, masu smo već prije definirali (u kontekstu zakona gibanja) kao *svojstvo tijela da se opire promjeni gibanja*. Obje definicije očito potječu od zakona kojima se još Newton bavio. No, dok je empirijska intuicija upućivala na to da bi se masa u oba slučaja mogla odnositi na isti materijalni sadržaj tijela, zbog konceptualnih razlika u definicijama uvedeni su različiti nazivi očiglednih značenja: *teška masa* odnosno *troma masa*.

Preko dvjesto godina istraživala je klasična fizika vezu između trome mase i teške mase. Sva su mjerenja sugerirala da se radi o istoj fizikalnoj veličini, jer se i za jednu i za drugu dobijao isti iznos (u granicama točnosti mjerenja).[41] No, konceptualna razlika prevladana je tek u Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti, koja je pokazala ekvivalentnost gravitacijske i inercijalne sile.

U Einsteinovoj relativnosti, međutim, gravitacija se pojavljuje kao geometrijsko svostvo prostora-vremena. Time je ona postala bitno različita od ostale tri fundamentalne sile, a ni Newtonov zakon gravitacije se konceptualno ne uklapa u tu relativističku predodžbu. Ipak, zakon gravitacije s praktičnog stajališta uglavnom dobro opisuje gibanje planeta – uostalom, Newton ga je i formulirao kao tumačenje Keplerovih zakona.

Kepler je oko 1605. godine opisao gibanje planeta oko Sunca pomoću tri zakona (ilustracija na Slici 8.1):

1. Planeti se kreću po elipsama u čijem se jednom žarištu nalazi Sunce.
2. Radij-vektor pojedinog planeta u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednake površine (osjenčane na Slici 8.1).
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi velikih poluosi njihovih eliptičnih putanja:

---

[41] Pažljivija formulacija glasi da su mjerenja ustanovila proporcionalnost trome i teške mase, koja prikladnim izborom jedinica postaje i jednakost iznosa.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

(na slici 8.1 nacrtane se dvije elipse sa velikim osima i žarištima).

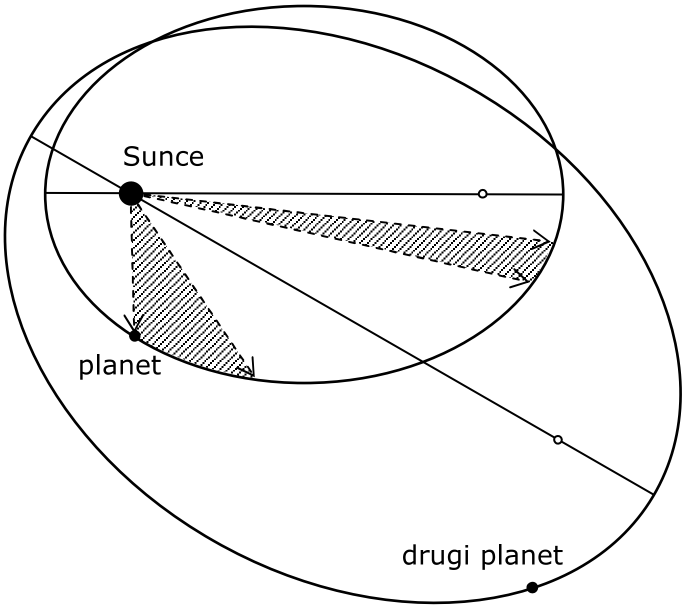
Keplerovi zakoni dobro opisuju gibanje planeta u aproksimaciji koja zanemaruje njihovo gravitacijsko djelovanje u odnosu na gravitacijsku silu puno masivnijeg Sunca. Iz Newtonovih zakona gibanja i gravitacije lako je pokazati da se satelit giba po eliptičnoj putanji oko masivnog tijela. Ovdje ćemo to ilustrirati samo za specijalni slučaj kad elipsa pređe u kružnicu. Tada gravitacija masivnog tijela M daje satelitu m centripetalnu akceleraciju

$$F = G_N \frac{Mm}{r^2} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r},$$

odakle dobijamo

$$v^2 = G_N \frac{M}{r}.$$

Satelit kruži konstantnom brzinom. Ako tu brzinu izrazimo preko ophodnog vremena T, lako se razumije treći Keplerov zakon jer $\frac{4r^2\pi^2}{T^2} = G_N \frac{M}{r}$ daje $\frac{r^3}{T^2} = konst$. Za opću eliptičnu putanju, međutim, neće biti konstantan iznos brzine, ali zakon o očuvanju momenta količine gibanja zahtijeva jednakost površina koje radij-vektor prebriše u jednakim vremenskim intervalima.



Slika 8.1. Keplerovi zakoni

8.2 Polje sile

Kod opisa potencijalne energije koristili smo "površnu" definiciju da je polje sile prostor u kojemu se osjeća djelovanje sile. Za konkretnu vrstu sile, kao što je npr. gravitacijska, može se formulirati preciznija definicija:

Gravitacijsko polje je svojstvo prostora da djeluje silom na masu (a potječe od drugih masa).

Na sličan način može se definirati i električno polje. Polje je vektorska veličina, a njegov iznos (kaže se i jakost polja) opisuje kolikom silom ono djeluje na jediničnu masu (a električno polje na jedinični naboj). Odatle proizlaze formule za *gravitacijsko polje mase* m *električno polje naboja* Q

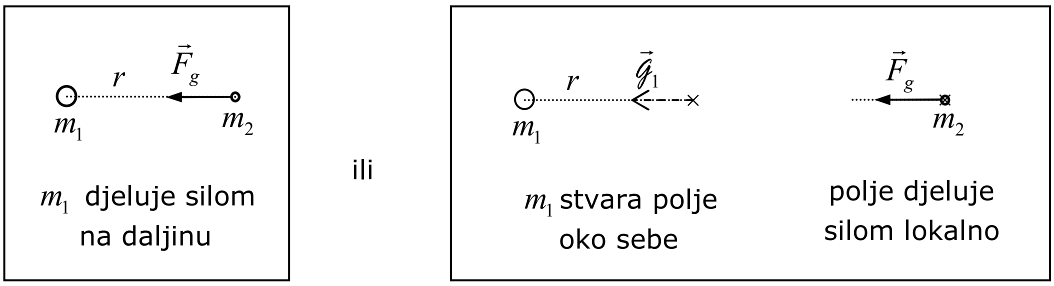
$$\boxed{g = G_N \frac{m}{r^2}} \qquad\qquad \boxed{\mathcal{E} = k\frac{Q}{r^2}}$$

pomoću kojih se zakon gravitacije, odnosno Coulombov zakon, mogu napisati kao:

$$F_g = \underbrace{G_N \frac{m_1}{r^2}}\, m_2 \qquad\qquad F_e = \underbrace{k\frac{Q_1}{r^2}}\, Q_2$$

$$\boxed{\vec{F}_g = \vec{g}_1 m_2} \qquad\qquad \boxed{\vec{F}_e = \vec{\mathcal{E}}_1 Q_2}$$

Iako se uvođenje pojma polja vizualno doima samo kao mala matematička manipulacija na formuli za silu (grupiranje nekoliko veličina), polje ima dublji konceptualni smisao. Umjesto djelovanja sile na daljinu, polje djeluje na tijelo lokalno, na mjestu gdje postavimo to tijelo. Tako npr. masa m_1 proizvodi na udaljenosti r gravitacijsko polje $\vec{g}_1$ koje na tome mjestu (označenom križićem na Slici 8.1 desno) stalno postoji – kao svojstvo samog prostora – bez obzira na to ima li tamo neke druge mase da na nju djeluje. Ako tamo doista stavimo masu m_2, gravitacijsko polje od mase m_1 "hvata" je silom $\vec{F}_g = \vec{g}_1 m_2$. (Slika 8.1 ne prikazuje i silu na m_1.)



Slika 8.1. Djelovanje sile na daljinu ili djelovanje polja lokalno

Opis sile pomoću polja ima različite praktične prednosti, osobito kad polje potječe od više izvora (a često se izvori i ne mogu pojedinačno identificirati). No, fizikalna stvarnost (relevantnost) pojma polja proizlazi zapravo iz analize koncepta djelovanja sile na daljinu. Ako na Slici 8.1 pomaknemo masu m_1 ulijevo, pitanje je kad će masa m_2 osjetiti da se sila umanjila zbog povećanja udaljenosti (isto pitanje može se postaviti i za silu među nabojima)?

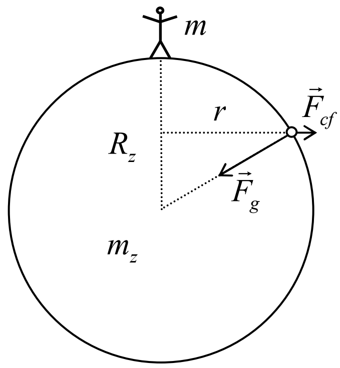
U predodžbi o izravnom djelovanju sile na daljinu, najsmislenija je pretpostavka o trenutnom djelovanju: m_2 će osjetiti promjenu sile u istom trenutku kad se m_1 počne micati. Ako, međutim, masa m_1 stvara polje oko sebe, onda njezino pomicanje uzrokuje promjenu toga polja. Tada je smisleno pretpostaviti da promjena polja počinje trenutno na mjestu gdje se m_1 nalazi, a da se dalje širi konačnom brzinom, te do mase m_2 stiže tek nakon nekog vremena.

Prema Einsteinovoj teoriji relativnosti, konačna brzina kojom se takve promjene šire kroz polje (i gravitacijsko i električno) jest brzina svjetlosti c. Kod električne sile tu je tvrdnju lako provjeriti izravnim mjerenjem, ali kod gravitacijske nije – i to zato što je puno slabija.[42] No, relativističku predodžbu dokazuju njezine uspješne primjene na specifičnim problemima,[43] a i novija opažanja sve izravnije potvrđuju da se i promjene gravitacijskog polja šire brzinom c.

U svakodnevnim situacijama na Zemlji, međutim, takva teorijska pitanja nemaju nekog praktičnog značaja. Pa čak i kada bi npr. neka hipotetička kataklizma iznenada istrgnula Sunce iz našeg planetarnog sustava, jedva da bi nas zanimalo da li će Zemlja još kakvih osam i po minuta nastaviti kružiti oko mjesta gdje se ono nalazilo (koliko treba svjetlosti za put od Sunca do Zemlje), ili će odmah krenuti u bespuća svemira.

Za praktične račune korisnije je razumjeti odnos između težine $G = mg$ i gravitacijske sile F_g te uočiti kolike su njihove varijacije na površini Zemlje. Promotrimo npr. čovjeka mase m koji stoji na sjevernom polu (Slika 8.2). Njegova težina jednaka je gravitacijskoj sili kojom ga Zemlja privlači, $mg = G_N \dfrac{mm_z}{R_z^2}$,

pa je $g = G_N \dfrac{m_z}{R_z^2} \equiv \mathcal{G}$, tj. akceleracija slobodnog pada jednaka je gravitacijskom polju Zemlje. No, to je točno samo na polovima, gdje oboje imaju iznos od oko 9,83 m/s^2.



Slika 8.2. Težina i gravitacija

Ako pogledamo neku točku na većoj geografskoj širini, zbog Zemljine rotacije će težina G biti zbroj gravitacijske sile F_g i centrifugalne sile F_{cf}. Zbog toga je težina malo manja od F_g (i malo se razlikuje po smjeru), a na isti način i akceleracija slobodnog pada odstupa od gravitacijskog polja. Razlika iznosa raste od pola prema ekvatoru, gdje doseže oko 0,3%.

Usto, centrifugalna sila je malo "spljoštila” Zemlju, pa je na ekvatoru udaljenost površine od središta veća nego na polovima. Zbog toga je i gravitacijska sila F_g na

---

[42] Usto, klasična mehanika ima i konceptualni problem: uspješna primjena Newtonovog zakona gravitacije na opis gibanja planeta zahtijeva pretpostavku o trenutnom djelovanju sile na daljinu.

[43] Npr. precesija Merkurove orbite, koja se ne može dobro opisati Newtonovim zakonom gravitacije.

površini manja što smo bliže ekvatoru (jer je R_z^2 u nazivniku veći), no maksimalna razlika doseže samo oko 0,2%.

Ukupni učinak na akceleraciju slobodnog pada jest da na ekvatoru iznosi oko 9,78 m/s^2 (a gravitacijsko polje je malo jače, oko 9,81 m/s^2). Kod preciznijih računa moraju se još uzeti u obzir i lokalne varijacije gravitacijskog polja zbog različite nadmorske visine i razlika u gustoći geoloških masiva u neposrednom okolišu.

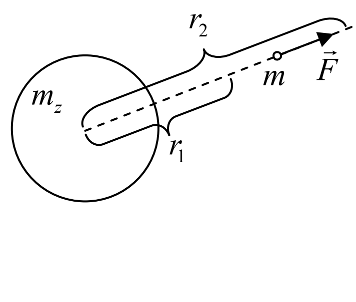
No, za mnoge primjene, a napose za potrebe ovoga kolegija, možemo koristiti samo zaokruženi prosječni iznos od 9,81 m/s^2 za akceleraciju slobodnog pada na površini Zemlje, te smatrati da je isto toliki i iznos gravitacijskog polja, tj. da posvuda vrijedi jednakost $\boxed{g = G_N \frac{m_z}{R_z^{\,2}}}$. Zgodno je koristiti i iz te jednakosti izvedenu supstituciju $gR_z^2 = G_N m_z$ (što ćemo činiti u daljnjem tekstu) ili, alternativno, iz nje izračunati masu Zemlje (približno 6·10^{24} kg) na temelju prosječnog radijusa Zemlje (6 371 km)[44].

8.3 Rad u gravitacijskom polju

Znamo od ranije da je za podizanje tijela potrebna sila koja je jednaka njegovoj težini, dok za horizontalno premještanje sila ne treba, pa na putu od točke 1 do točke 2 moramo uložiti rad $W=E_{p2}-E_{p1}$, što blizu povšine Zemlje iznosi mgh ako je točka 2 na visini h iznad točke 1.

Promotrimo sada koliki rad treba uložiti na većim udaljenostima od Zemlje, na kojima težina nije približno konstantna nego se opaža da opada sa r^2 (prema zakonu gravitacije).

Masu m podižemo duž pravca koji prolazi kroz središte Zemlje, iz točke udaljene za r_1 od središta do točke na udaljenosti r_2. Na skici je masa prikazana u proizvoljnom međupoložaju, na udaljenosti r od središta Zemlje, a podižemo je silom $\vec{F}$ koja je jednaka gravitacijskoj sili kojom je Zemlja privlači.



Uloženi rad je jednak:

$$W = \int_1^2 F ds = \int_{r_1}^{r_2} F_g dr = G_N m_z m \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = G_N m_z m \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_{r_1}^{r_2} = -G_N \frac{m_z m}{r_2} - (-G_N \frac{m_z m}{r_1}) = E_{p_2} - E_{p_1}$$

[44] Izračunat iz "radijusa” na polovima od 6 357 km i na ekvatoru od 6 378 km.

Odatle se vidi da je potencijalna energija mase m u gravitacijskom polju Zemlje (ako za aditivnu konstantu odaberemo nulu)

$E_p = -G_N \dfrac{m_z m}{r}$, gdje je r udaljenost mase m od središta Zemlje.

Često je, međutim, zgodnije izraziti tu potencijalnu energiju preko veličine φ koja se zove *gravitacijski potencijal*, osobito ako na masu djeluju gravitacijska polja od više tijela.

Gravitacijski potencijal Zemlje na udaljenosti r od središta Zemlje: $\varphi = -G_N \dfrac{m_z}{r}$.

Gravitacijski potencijal je svojstvo prostora da u njemu mase imaju potencijalnu energiju. Gravitacijski potencijal neke točke opisuje koliku će potencijalnu energiju po kilogramu imati tijelo ako je u toj točki. Dakle:

$E_p = m\varphi$.

Ako se rad potreban za premještanje mase m iz točke 1 u točku 2 izrazi pomoću potencijala, imamo

$W = (\varphi_2 - \varphi_1)\ m$.

Razlika potencijala naziva se naponom, U, osobito u električnom polju (gdje je rad jednak umnošku napona i naboja), dok se u gravitacijskom polju naziv slabo koristi.

Koliki je gravitacijski potencijal φ_0 na površini Zemlje (tj. potencijalna energija mase od 1 kg)? Potencijal i potencijalna energija su neodređeni integrali za koje smo u gornjim formulama odabrali aditivnu konstantu nula, pa je

$\varphi_0 = -G_N \dfrac{m_z}{R_z} = -\dfrac{gR_z^2}{R_z} = -gR_z = -64$ MJ/kg, uz $g = 10$ m/s^2 i $R_z = 6\,400$ km.

Negativna vrijednost je smislen i uobičajen izbor za opis potencijalne energije sustava u kojemu su tijela vezana privlačnim silama. Ona opisuje koliko rada treba uložiti da bi se veze raskinule, tj. da bi se tijelo oslobodilo iz sustava (dakle, toliko energije "fali” do slobodnog stanja). U navedenom primjeru, potrebno je uložiti 64 MJ da bi se 1 kg udaljio od Zemlje toliko da više ne osjeća njezinu gravitaciju (prema formuli, u beskonačnost), i tamo će imati potencijalnu energiju nula.

Naravno, rad u polju, odnosno razlika potencijalnih energija, ne ovisi o izboru aditivne konstante. Ako podižemo tijelo s površine Zemlje ($r = R_z$), gdje ima potencijalnu energiju E_{p0}, na malu visinu $h = r - R_z$, izvršit ćemo rad koji je približno jednak mgh jer je $R_z / r \approx 1$:

$$E_p - E_{p0} = -G_N \frac{m_z m}{r} + G_N \frac{m_z m}{R_z} = mgR_z^2 \frac{r - R_z}{rR_z} = mg \frac{R_z h}{r} \approx mgh$$

U takvoj situaciji nije zgodna predodžba da tijelo na površini ima -64·10^6 J/kg, nego bi nam više odgovaralo $E_{p0} = 0$. To znači da ćemo u izrazu za potencijal zadržati aditivnu konstantu, tj. pisati $\varphi = -G_N \frac{m_z}{r} + C$, te odabrati vrijednost $C = -\varphi_0$.

9 Specijalna teorija relativnosti

Pod nazivom "teorija relativnosti" obično se podrazumijeva Einsteinova *Opća teorija relativnosti* iz 1915. godine. Nju ovdje nećemo razmatrati zbog konceptualne i matematičke kompliciranosti.

Odlučujući korak prema općoj relativnosti bio je Einsteinov rad iz 1905. godine, za koji se danas koristi naziv *Specijalna teorija relativnosti*.[45] Za razliku od opće teorije, ona je bila ograničena samo na razmatranja u inercijalnim sustavima, zbog čega nosi naziv "specijalna". Konceptualno se dramatično razlikuje od svakodnevnog iskustva, ali matematički nije zahtjevna, pa bi trebala biti rutinski dio obrazovanja na visokoškolskim ustanovama.

Termin "teorija" ne označava u ovom slučaju ništa hipotetičko: sve tvrdnje specijalne teorije odavno su dokazane, i ugrađene u današnju fiziku. A ni termin "relativnost" ne znači da je "sve relativno"; prije bi se moglo reći da opisuje što jest relativno i na koji način, a što nije.

9.1 Apsolutna brzina svjetlosti

Izravni poticaj otkriću "Einsteinove" relativnosti bio je rezultat glasovitog mjerenja brzine svjetlosti, koji su Michelson i Morley objavili 1887. godine. Zemlja se oko Sunca giba brzinom od približno 30 km/s, pa su oni očekivali da će izmjeriti razliku u relativnoj brzini svjetlosti iz različitih smjerova, npr. razliku između brzine svjetlosti koja se giba Zemlji ususret, i one koja sustiže Zemlju. Nisu, međutim, opazili nikakvu razliku, iako su uređaji bili dovoljno precizni da je izmjere čak i kada bi se Zemlja gibala oko Sunca nekoliko puta sporije.[46]

Prirodno poopćenje toga rezultata ("logičan zaključak") jest da različiti promatrači, koji se gibaju jedan u odnosu na drugoga, vide istu brzinu svjetlosti.

Zašto je to neobično? Zato što je posve suprotno našem svakodnevnom iskustvu, i svim dotadašnjim opažanjima u vezi relativnog gibanja: promatrači koji se gibaju jedan u odnosu na drugoga trebali bi vidjeti različite brzine svjetlosti.

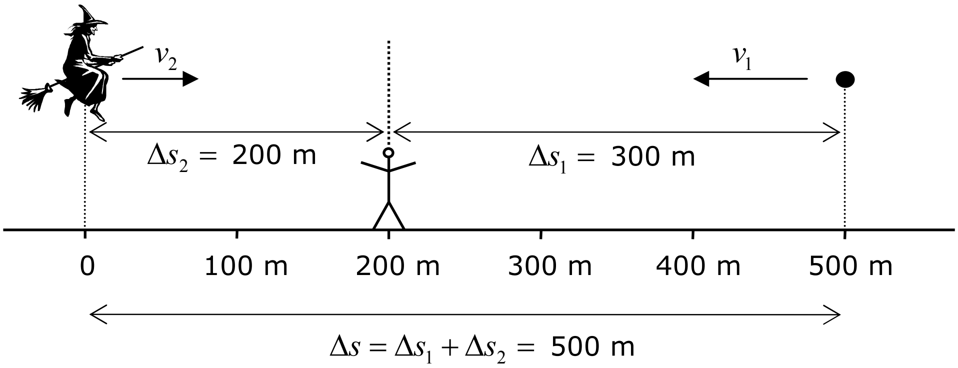
Iako je ta tvrdnja "klasične mehanike" većini ljudi intuitivno bliska, korisno je razjasniti na čemu se ona temelji. U tu svrhu razmotrimo detaljnije jednostavan primjer u kojemu dva promatrača mjere brzinu istoga tijela. Neka se, primjerice, u odnosu na promatrača koji stoji na površini Zemlje, neko tane giba horizontalnom brzinom $v_1 = 300$ m/s. Tanetu ususret, na istoj visini, leti vještica na metli brzinom

---

[45] Stvarni naziv Einsteinove publikacije bio je "O elektrodinamici tijela u kretanju".

[46] Oni su zapravo htjeli izmjeriti brzinu Zemlje prema tzv. eteru (tadašnjem hipotetičkom mediju za elektromagnetske valove), te su svoj rezultat prezentirali kao neuspjeh mjerenja.

$v_2 = 200$ m/s. Ako pitamo vješticu kolika je brzina taneta u njezinom sustavu, očekujemo da će ona reći kako tane prema njoj ide relativnom brzinom $v_r = v_1 + v_2 = 500$ m/s. Pogledajmo pažljivije na čemu se temelje naša očekivanja. Slika 9.1 pokazuje prostorni raspored naših promatrača i taneta, u trenutku koji je odabran tako da će nakon vremenskog intervala od jedne sekunde ($\Delta t = 1$s) tane pogoditi vješticu (koja će to podnijeti bez posljedica, zato smo je i odabrali za drugog promatrača).



Slika 9.1. Zašto vještica vidi brzinu taneta od 500 m/s?

Promatrač na Zemlji vidi da će tane udaljeno 300 m (na desnoj strani) za 1 s stići iznad njega, te da će vještica udaljena 200 m (na lijevoj strani) za istu tu 1 s stići iznad njega, dakle tane će za 1 s udariti vješticu.

Kad određuje brzinu taneta u svojem sustavu (koju ovdje zovemo "relativna brzina", tj. v_r), vještica mjeri kako se objekti gibaju u odnosu na nju, dakle kao da ona miruje. Ona vidi tane udaljeno 500 m, koje će za 1 s udariti u nju, pa će zato izračunati brzinu taneta kao

$$v_r = 500\frac{m}{s} = \frac{500m}{1s} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} + \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = v_1 + v_2 .$$

Ukratko, kad iz našeg sustava vidimo kako se dva tijela gibaju jedno prema drugome brzinama v_1 i v_2, relativna brzina jednoga tijela prema drugome *mora* biti jednostavni zbroj $v_r = v_1 + v_2$ *ako* se u sustavima vezanima uz ta tijela jednako vidi *prostor* (iste udaljenosti Δs_1 i Δs_2) kao u našem sustavu, i jednako mjeri *vrijeme* (isti vremenski interval Δt) kao u našem sustavu.

Ako bismo u primjeru na Slici 9.1 uvećali udaljenosti i brzine milijun puta, tane bi postalo foton koji se giba brzinom svjetlosti $c \approx 300\ 000$ km/s, a vještica bi imala brzinu od 2/3 c. Uz pretpostavku da jednako vidi prostor i vrijeme kao i promatrač na Zemlji, ona bi morala izmjeriti brzinu fotona od 500 000 km/s, kao što su Michelson i Morley očekivali da će izmjeriti brzine svjetlosti koje se razlikuju za $\pm$ 30 km/s.

Nasuprot tome, ako postavimo zahtjev da promatrači koji se gibaju jedan u odnosu na drugoga moraju vidjeti *jednaku brzinu svjetlosti*, to nužno vodi na posljedicu da oni moraju *različito vidjeti ili prostor ili vrijeme, ili obadvoje*. Tako bi, primjerice, vještica mogla izmjeriti brzinu spomenutog fotona kao 300 000 km/s (dok se ona giba brzinom od 2/3 c u odnosu na Zemlju), ako vidi:

- Zemaljsku udaljenost $\Delta s = 500\ 000$ km skraćenu na 300 000 km, te istovremeno Zemaljski vremenski interval ($\Delta t = 1$ s) jednakog trajanja; ili
- Zemaljski vremenski interval $\Delta t = 1$ s kao da traje duže, oko 1,33 s, a Zemaljsku udaljenost $\Delta s = 500\ 000$ km jednake duljine; ili
- malo manje skraćeni Δs i malo manje produljeni Δt, usklađene tako da opet izračuna $\Delta s / \Delta t =$ 300 000 km/s.

Istinita je ova posljednja opcija, koja je i intuitivno privlačnija zbog svoje simetričnosti, a proizlazi iz tzv. Lorentzovih transformacija.

9.2 Lorentzove transformacije

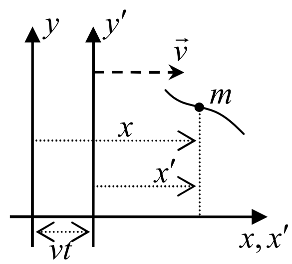
Zamislimo da se, u odnosu na naš inercijalni sustav $S(x, y, z)$, neki drugi inercijalni sustav $S'(x', y', z')$ giba pravocrtno konstantnom brzinom v (Slika 9.2). Pravokutne Kartezijeve osi odabrane su tako da os x' klizi duž osi x, a obadvije pokazuju u smjeru $\vec{v}$. U ravnini slike vide se još osi y i y', dok osi z i z' zapravo ne treba ni razmatrati jer su u istom odnosu prema smjeru relativnog gibanja (okomite) pa će za njih vrijediti isti zaključci kao i za y i y'. U trenutku kad je ishodište sustava S' prolazilo kroz ishodište sustava S, promatrači iz oba sustava postave satove na nulu.

Pogledajmo najprije kako se relativnost gibanja opisuje u *klasičnoj fizici*, koja polazi od intuitivne pretpostavke "apsolutnog" prostora i vremena (tj. da se jednako opažaju iz svih sustava). U trenutku prikazanom na slici, promatrači opisuju proizvoljno gibanje čestice m svaki pomoću svojih koordinata. Veza među njihovim koordinatama u klasičnoj fizici (tzv. Galilejeve transformacije) lako se vidi sa slike:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$

Galilejeve transformacije

iz klasične fizike



Slika 9.2

Jedina razlika se opaža u x-koordinatama: x' je manji od x, jer se od trenutka nula do trenutka $t = t'$ sustav S' približio čestici za pređeni put vt. Deriviranjem x-relacije po vremenu dobiva se klasična razlika u brzinama čestice koje se opažaju iz ta dva sustava (jednaka brzini v), a još jedno deriviranje daje istu akceleraciju čestice u oba sustava (što znači da će drugi

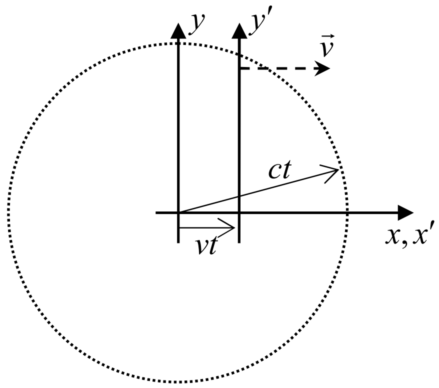
Newtonov aksiom i iz njega izvedeni zakoni mehanike imati isti oblik u oba sustava).

Nasuprot tome, Einsteinova teorija uvodi apsolutnu brzinu svjetlosti, zbog čega prostor i vrijeme postaju relativni. Pogledajmo kako to mijenja transformacije koordinata među inercijalnim sustavima iz prethodnog primjera (Slika 9.3).

Promatrači će opisivati kako se širi svjetlost od kratkotrajnog bljeska, koji se dogodio na mjestu gdje su se oba ishodišta nalazila u trenutku $t_0 = t'_0 = 0$. Iz perspektive "našeg" sustava S, prikazane na slici, svjetlost je do trenutka t otputovala do udaljenosti ct u svim smjerovima, pa je njezina fronta opisana kružnicom tolikoga radijusa

$$c^2t^2 = x^2 + y^2,$$

sa središtem u našem ishodištu.



Slika 9.3

Sa stajališta klasične fizike, očekivali bismo da promatrač iz S' vidi frontu kao kružnicu istoga "našeg" radijusa, pomaknutu u odnosu na svoj sustav za $-vt$ po osi x', jer je on toliko otputovao na drugu stranu u međuvremenu.

No, kako brzina svjetlosti ne ovisi o promatraču, on zapravo mora vidjeti na isti način opisanu kružnicu sa središtem u svojem ishodištu:

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2,$$

bez obzira što si mi to intuitivno (na temlju iskustva) ne možemo zamisliti. A intuitivne Galilejeve transformacije koordinata treba promijeniti tako da, kad se uvrste u jednadžbu kružnice promatrača S', daju "našu" jednadžbu kružnice.

Radi bolje preglednosti, uvedimo koordinate iste dimenzije, uz malo drugačije oznake: $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ (te $x_3 = z$, koji nam ovdje ne treba). Tako dobivamo jednadžbe kružnica koje opisuju svjetlosnu frontu u novom obliku:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{ u sustavu } S, \quad \text{odnosno } x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 = 0 \text{ u sustavu } S'.$$

Galilejeve transformacije razlikuju se od identitete samo u x_1-koordinatama, za koje u novim oznakama imamo vezu $x'_1 = x_1 - \beta x_0$, gdje smo uveli kraticu $\beta = v/c$. Da bi transformacije koordinata preobrazile S′-kružnicu u S-kružnicu, očito bi trebalo i kod x_0-veze dodati neki β- član, da se oduzme s β- članom iz x_1-veze. Pokušajmo sa simetričnom vezom $x'_0 = x_0 - \beta x_1$, i uvrstimo "popravljene" veze u S′-kružnicu:

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 = (x_0 - \beta x_1)^2 - (x_1 - \beta x_0)^2 - x_2^2 = 0 .$$

Nakon kvadriranja i oduzimanja mješovitih članova, dobijemo jednadžbu

$$x_0^2(1-\beta^2) - x_1^2(1-\beta^2) - x_2^2 = 0,$$

koja se samo po faktoru $(1-\beta^2)$ razlikuje od S-kružnice. No, on se lako eliminira dijeljem veza za x_0 i x_1 sa odgovarajućim korijenom, tj. sa $\sqrt{1-\beta^2}$. Tako dobijamo, umjesto klasničnih Galilejevih, nove relativističke transformacije, koje se nazivaju Lorentzovim transformacijama[47] koordinata:

$$x_0' = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{ili} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' = x_2 \qquad y' = y$$

$$x_3' = x_3 \qquad z' = z$$

Lorentzove transformacije

Ako je brzina sustava S′ puno manja od brzine svjetlosti, tj. ako $v << c$, prelaze u Galilejeve: korijeni u nazivnicima približno su jednaki 1, a razlomak v/c^2 nuli, pa u brojniku prve relacije prestaje ovisnost vremena o x-koordinati, tj. $t' \approx t$.

9.3 Relativnost prostora i vremena

Prema Einsteinovoj izvornoj zamisli, cijela specijalna teorija relativnosti dade se deducirati iz dva jednostavna postulata[48] (koje ovdje navodimo u sažetijem, malo pojednostavljenom obliku):

Einsteinovi postulati specijalne teorije relativnosti

Princip relativnosti: Fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim sustavima.

Invarijantnost brzine svjetlosti: Brzina svjetlosti u vakuumu (c) ima isti iznos u svim inercijalnim sustavima (bez obzira na gibanje izvora svjetlosti).

Prvi postulat je proširenje klasičnog (Galilejevog) principa relativnosti, koji se mogao formulirati na isti način, ali se zapravo odnosio samo na zakone mehanike. Drugi postulat izriče novu spoznaju o invarijantnoj (apsolutnoj) brzini svjetlosti.

Na temelju tih postulata upravo smo izveli Lorentzove transformacije koordinata između dva inercijalna sustava.

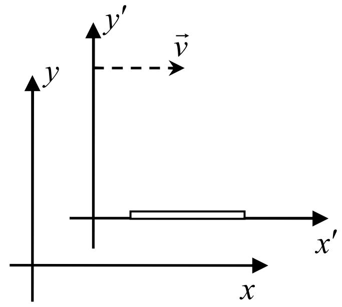
[47] Hendrik Lorentz je još 1895. godine pokušao *kontrakcijom duljina* objasniti Michelson-Morleyeva mjerenja, a nekoliko godina kasnije uveo je i *dilataciju vremena* u opis elektromagnetskih pojava.

[48] Naknadna analiza (Einsteinov rad iz 1920.) pokazuje da su bile implicirane dodatne pretpostavke: da je prostor homogen i izotropan, te da ranija mjerenja (povijest) ne utječu na mjerne uređaje.

Kao što se na prvi pogled vidi, Lorentzove relacije ukidaju pojam apsolutnog vremena jer više nije $t' = t$. Specijalno, na usporedbu vremenskih mjerenja za pojedine događaje utječe i njihov položaj (koordinata u smjeru relativnog gibanja promatrača), pa istovremeni događaji u jednom sustavu ne moraju biti istovremeni za promatrača u drugom sustavu.

Također, nazivnik $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ u Lorentzovim transformacijama sugerira da će promatrači različito vidjeti vremenske intervale, kao i prostorne intervale u smjeru gibanja.

Primjerice, duljinu štapa koji putuje zajedno sa sustavom S' (Slika 9.4) izmjeriti će promatrač iz toga sustava (kao razliku koordinata njegovih krajeva) $l_0 = x_2' - x_1'$, a promatrač iz sustava S kao $l = x_2 - x_1$ (pri čemu indeks nula označava tzv. vlastitu duljinu, u mirovanju). Vezu između tih duljina dobijamo lako pomoću Lorentzovih transformacija, samo moramo paziti na istovremenost mjerenja krajeva štapa. Ovdje možemo x-koordinate izraziti iz Lorentzove relacije za x', pa imamo:



Slika 9.4

$$l = x_2 - x_1 = x_2'\sqrt{1-(v^2/c^2)} + vt_2 - x_1'\sqrt{1-(v^2/c^2)} - vt_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1-(v^2/c^2)}\ ,$$

jer su u sustavu S istovremeno mjereni krajevi štapa x_1 i x_2, tj. $t_1 = t_2$.

Sličnim razmatranjem dobijamo i odnos vremenskih intervala koji opisuju trajanje istoga procesa u dva sustava. Rezultate je uobičajeno rezimirati pod slijedećim nazivima:

Kontrakcija duljina:	**Dilatacija vremena:**
$l = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$	$\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$

Tijela koja se gibaju u odnosu na nas izgledaju nam skraćena u smjeru gibanja, a satovi koji se gibaju u odnosu na nas (ili kakvi drugi procesi) izgledaju kao da kasne. U sustavu u kojemu se ne gibaju, duljine su najdulje (vlastite duljine l_0) a trajanje procesa najkraće (vlastito vrijeme trajanja Δt_0).

Ravnopravnost promatrača može izgledati paradoksalno. Promatrač sa Zemlje gleda putnika u svemirskom brodu i kaže: "Kod njega vrijeme teče usporeno, pa će on stariti sporije od mene." No, za putnika se Zemlja giba relativno u odnosu na njega, pa vidi da na Zemlji vrijeme teče usporeno, i da će Zemljanin stariti sporije.

Tko je u pravu?[49] Ako su oba u inercijalnim sustavima, gibaju se jedan u odnosu na drugoga jednoliko po pravcu, i više se nikada neće ponovo vidjeti da usporede starenje – i oba su "u pravu”. Da bi mogli usporediti starost, jedan se mora "vratiti”, pa on neće biti u inercijalnom sustavu (zbog kočenja, zaokretanja itd.). U tom slučaju, "u pravu” je promatrač iz inercijalnog sustava, tj. povratnik će doista manje ostariti.[50]

Na kraju, pogledajmo kako Lorentzove transformacije opisuju percepciju relativne brzine iz različitih sustava. Pretpostavimo da se neka čestica giba paralelno s osima x,x′ inercijalnih sustava S i S′ sa Slike 9.2 ili 9.3. Tada će njezina brzina imati samo jednu skalarnu komponentu, koju ćemo u tim sustavima obilježiti s u_x odnosno u'_x.

Budući da iz Lorentzovih relacija neposredno vidimo diferencijale $dx' = \dfrac{dx - vdt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,

odnosno $dt' = \dfrac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, njihovim dijeljenjem lako dobijamo brzinu čestice:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}},$$

gdje smo u posljednjem koraku podijelili brojnik i nazivnik sa dt i uvažili da je po definiciji $u_x = \dfrac{dx}{dt}$.

Dobiveni opći izraz možemo prilagoditi oznakama i primjeru vještice i taneta sa Slike 9.1. Treba najprije vezati sustav S′ uz vješticu (zamjenom oznaka $v \to v_2$), i još uočiti da tane ima negativnu x-komponentu brzine u oba sustava. Stoga u "našem” sustavu S treba zamijeniti $u_x \to -v_1$, a u vještičinom sustavu $u'_x \to -v_r$. Uvrštavanjem zamjena u opću fromulu dobijamo (prema oznakama sa Slike 9.1):

Relativna brzina kad se dva tijela gibaju jedno drugome ususret:[51] $v_r = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$.

Za brzine prikazane na Slici 9.1, nazivnik iz ove formule ima zanemarivo mali utjecaj na obično zbrajanje u brojniku, pa stoga u svakodnevnom životu i ne

[49] Pitanje se može preformulirati kao tzv. paradoks blizanaca: jedan je ostao na Zemlji, a drugi otišao na put svemirskim brodom. Kad se ovaj drugi vrati, koji će biti mlađi?

[50] Detaljnije objašnjenje slijedi iz opće relativnosti, prema kojoj inercijalna sila uzrokuje asimetrično usporenje vremena.

[51] Iako je ovo samo jedna od mogućih opcija relativnog gibanja, ona najpreglednije ilustrira razlike u klasičnom i relativističkom "zbrajanju brzina" kod relativnog gibanja.

opažemo takve relativističke efekte. Ali zato isti taj nazivnik osigurava odgovarajuće ograničenje relativne brzine kod bržih gibanja (npr. kad ono tane zamijenimo fotonom). Tada i promatrač (npr. ona vještica) koji se giba brzinom v ususret fotonu (u odnosu na naš sustav) vidi jednaku brzinu svjetlosti c kao i mi,

$$\frac{v+c}{1+\frac{vc}{c^2}} = \frac{(v+c)c}{c+v} = c \, ,$$

kao što se i moralo zaključiti iz opažanja Michelsona i Morleya.

9.4 Ekvivalentnost mase i energije

$$\boxed{\mathbf{E = mc^2}}$$

Ekvivalentnost mase i energije, $E=mc^2$, najpoznatija je jednadžba specijalne teorije relativnosti. Fizičari bi, otprilike, rekli: masa i energija su ista stvar, samo se njihove SI jedinice razlikuju, pa kilograme treba pomnožiti sa c^2 da se dobiju džuli.

No, u klasičnoj fizici samo materija ima masu, a u svakodnevnim predožbama masa je upravo i mjera za količinu materije. Sjetimo se, u klasičnoj fizici masa je *svojstvo tijela*, i to (1) da se opire promjeni gibanja (troma masa), ili (2) da privlači druga tijela prema zakonu gravitacije (teška masa).

Klasična mjerenja (npr. slobodan pad) pokazuju da su troma i teška masa proporcionalne veličine, a u kilogramima se i numerički podudaraju. Specijalna relativnost se ne bavi gravitacijom, pa je implicitno ograničena na pojam trome mase. Ali zato opća teorija relativnosti pokazuje da troma i teška masa nisu tek numerički podudarne, nego doista predstavljaju samo jednu fizikalnu veličinu. (Zbog toga se distinkcija između trome i teške mase danas spominje samo u kontekstu fizikalne povijesti.)

No, kako iz klasične perspektive razumjeti koncept da i energija ima masu? Nećemo ovdje pratiti Einstienova izvorna razmišljanja, niti kasnija elegantna ali matematički zahtjevnija objašnjenja, nego ćemo grubo skicirati jedno moguće obrazloženje koje ostaje u okvirima ovdje izloženoga gradiva.

Nije teško razumjeti da relativiziranje prostora i vremena, uvedeno Lorentzovim transformacijama, zahtijeva izvjesne prilagodbe zakona mehanike. Tako se npr. analizom sudara dvaju tijela može pokazati (što ovdje nećemo provesti) da zakon o očuvanju količine gibanja (promatran u različitim inercijalnim sustavima) zahtijeva da se, u odnosu na klasičnu definiciju količine gibanja, produkt mase i brzine podijeli s $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. To vodi na zaključak:

Masa tijela koje se giba brzinom v iznosi $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$,

gdje je m_0 masa mirovanja istoga tijela.

Dakle, tijelo koje se giba ima veću masu nego u mirovanju. Njegova količina gibanja mora se računati pomoću te uvećane, tzv. *relativističke mase* da bi $\vec{p} = m\vec{v}$ bila ona ista fizikalna veličina za koju vrijedi zakon očuvanja. Odatle se vidi da je veća sila je potrebna za jednako ubrzanje nego kod tijela u mirovanju. Tijelo ne može dosegnuti brzinu svjetlosti c jer bi mu masa postala beskonačna. A uostalom, nijedna sila ne može mu više dati osjetno ubrzanje kad se jako približi brzini svjetlosti jer mu je masa ogromna.

Prije sto godina bila je relativistička masa egzotičan teorijski koncept, no danas se lako može pokazati kod brzih čestica, npr. elektrona, čak i u svakodnevnim industrijskim primjenama. U katodnim cijevima televizora elektronima se uveća masa za nekoliko postotaka, u dijagnostičkim rendgenskim uređajima za oko jednu četvrtinu (kod snimanja pluća), a u industrijskim akceleratorima za ozračivanje hrane (radi konzerviranja) postižu elektroni oko 11 puta veću masu od one koju imaju u mirovanju.

No, odakle tijelu koje se giba ta "dodatna" masa – kad se nije povećalo (nego, naprotiv, izgleda manje nego u mirovanju, zbog kontrakcije duljina u smjeru gibanja)? Jedina klasična skalarna veličina koju tijelo ima upravo zbog gibanja je kinetička energija, pa se praktično nameće odgovor da ona mora imati masu. Samo je pitanje kojim faktorom treba pomnožiti E_k da bi se dobilo povećanje mase $\Delta m = m - m_0$ (ili obrnuto). Odgovor je $E_k = (\Delta m)c^2$, a faktor c^2 proizlazi iz zahtjeva da pri malim brzinama moramo dobiti klasični izraz $E_k = m_0 v^2 / 2$.

Naravno, takva se veza između mase i energije ne može ograničiti samo na kinetičku energiju, budući da se energija lako pretvara iz jednog oblika u drugi, tj. nužna je opća ekvivalentnost mase i energije. Stoga se i izraz za kinetičku energiju može napisati tako da istakne opću ekvivalentnost ($E=mc^2$):

Opći izraz za kinetičku energiju: $E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1)$

Dakle, kinetička energija je razlika između energijske vrijednosti mase tijela kada se giba (relativistička masa m) i energijske vrijednosti mase tijela kada miruje (klasična masa ili masa mirovanja m_0). Ako relativističku masu izrazimo pomoću mase mirovanja, možemo izlučiti $m_0 c^2$, i dobiti eksplicitnu ovisnost E_k o masi mirovanja i brzini (drugi dio gornjeg izraza).

Da bi se dokazala prethodna tvrdnja kako masu treba množiti s faktorom c^2 (u relaciji ekvivalentnosti) radi konzistentnosti s klasičnim izrazom za kinetičku energiju, razvit ćemo gornji izraz u zagradi u red potencija:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}-1=(1/2)(v^2/c^2)+(3/8)(v^4/c^4)+(5/16)(v^6/c^6)+...$$

Pri malim brzinama zanemarivi su svi daljnji članovi u odnosu na prvi, a prvi član će doista dati $m_0v^2/2$ kad se pomnoži s m_0c^2.

Odstupanja od predodžbi klasične fizike, koja proizlaze iz $E=mc^2$, mogu se ukratko rezimirati na slijedeći način:

I energija ima masu (a ne samo materija).

Ne vrijede klasične predodžbe o zasebnom očuvanju materije i energije.

Materija se može pretvarati u energiju, i energija u materiju – ali tako da se očuva ukupna masa, koja je njihova zajednička mjera.

Napose, iz $E=mc^2$ slijedi da masa nekog složenog objekta nije jednostavan zbroj masa njegovih sastavnih dijelova, nego još treba uračunati i njihovu energiju.

Primjerice, atomska jezgra He-4 sastoji se od 4 nukleona, 2 protona i 2 neutrona, a njezina masa mirovanja manja je od zbroja njihovih pojedinačnih masa (za oko 1%) zbog negativne potencijalne energije koju imaju kad su vezani u jezgru.

čestica	*proton*	*neutron*	*He-4*	*Δm*	*Δm/4*
masa (MeV)	938,272	939,566	3727,379	28,297	7,074

U gornjoj tablici navedene su mase u jedinicama za energiju MeV koje su uobičajene u tome području.[52] Vidi se da jezgra He-4 ima *defekt mase Δm* oko 28 MeV (odnosno oko 7 MeV po nukleonu). Defekt mase (ili *energija vezanja*) jednak je radu koji bi trebalo uložiti da se jezgra rastavi na nukleone (protiv privlačne jake nuklearne sile), odnosno energiji koja bi se oslobodila prilikom formiranja jezgre iz pojedaničnih nukleona.

Iz istih razloga javlja se defekt mase i u kemijskim vezama, ali je tu uzrokovan električnom silom koja je puno slabija, pa je energija vezanja reda veličine 1 eV po atomu.

---

[52] Elektronvolt je energija koju elektron dobije dok prođe kroz napon od jednoga volta, a iznosi približno 1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J. Da se izračuna maseni ekvivalent u kilogramima, treba ga izraziti u džulima i podijeliti sa c^2, no to se podrazumijeva i ne piše eksplicitno (mada neki pišu npr. MeV/c^2 kada žele nglasiti da govore o masi).

Kad god iz nekog goriva dobijemo energiju, polazni sastojci su izgubili odgovarajući ekvivalent mase koja je iz reakcije izašla u obliku energije. Da bi se to dogodilo, morao je materijal preći iz oblika sa slabijom energijom vezanja u oblik sa čvršćom energijom vezanja. Specijalno, u atomskim jezgrama, energija vezanja po nukleonu najveća je za elemente oko sredine periodnog sustava, pa se energija najefikasnije dobija fuzijom (spajanjem) vrlo lakih jezgri u teže, ili fisijom vrlo teških jezgri (cijepanjem na dva podjednaka dijela).

Osim spomenutog djelomičnog pretvaranja materije u energiju, na razini čestica odvijaju se posvuda oko nas i procesi potpunog pretvaranja. Materija se u cjelosti pretvara u energiju (u gama zračenje) u sudaru čestice i antičestice (tzv. anihilacija), što se danas koristi npr. u medicinskoj primjeni koja se zove pozitronska emisijska tomografija (PET). Obrnuto, prilikom prolaska gama zračenja kroz tvar, mogu od njega nastati parovi čestica-antičestica, što se stalno dešava u kozmičkom zračenju koje padne na Zemlju. Primjerice, da bi gama foton proizveo par elektron-pozitron, mora imati energiju veću od 1,022 MeV (jer energijski ekvivalenti masa elektrona i pozitrona iznose 0,511 MeV za svakoga).

A mogući su i procesi konverzije puno širih razmjera. Na primjer, prema danas općenito prihvaćenoj kozmološkoj teoriji, svemir se u ranoj fazi razvoja sastojao od čestica i fotona vrlo velike energije. U toj su se "juhi" navodno stalno odvijali procesi anihilacije i tvorbe parova u svemirskim razmjerima.

Ipak, treba spomenuti da je poznavanje svemira u pogledu materije-energije vrlo ograničeno. I to ne zbog nekih dalekih dijelova koji ne bi bili dostupni opažanju, nego zbog sadržaju koji se navodno nalazi posvuda oko nas. Prema novijim teorijama, "obična" materija čini tek oko 4% mase svemira, a ostatak čine tzv. tamna materija (23%) i tamna energija (73%).

Tamna materija postulirana je još prije nekoliko desetljeća, grubo govoreći kao masa koja nedostaje galaksijama da se ne raspadnu zbog rotacije – jer obična materija ne daje ni približno dovoljnu gravitacijsku centripetalnu silu. Njezino postojanje potvrđuju novija opažanja (npr. o ponašanju dviju galaksija koje prolaze jedna kroz drugu), ali još nema nikakvih spoznaja o tome od čega se sastoji.

Tamna energija postulirana je tek prije desetak godina. Ona je predložena za objašnje novijih spoznaja da se svemir danas ubrzano širi (i čini se da zasad predstavlja najmanje proturječno tumačenje). Glavna odlika tamne energije je egzotično svojstvo negativnog tlaka koje uzrokuje ubrzano širenje svemira (kao da ima svojstvo antigravitacije). Pretpostavlja se da je uglavnom jednoliko raspoređena po cijelom svemiru, a eventualna opažanja tek predstoje.[53]

---

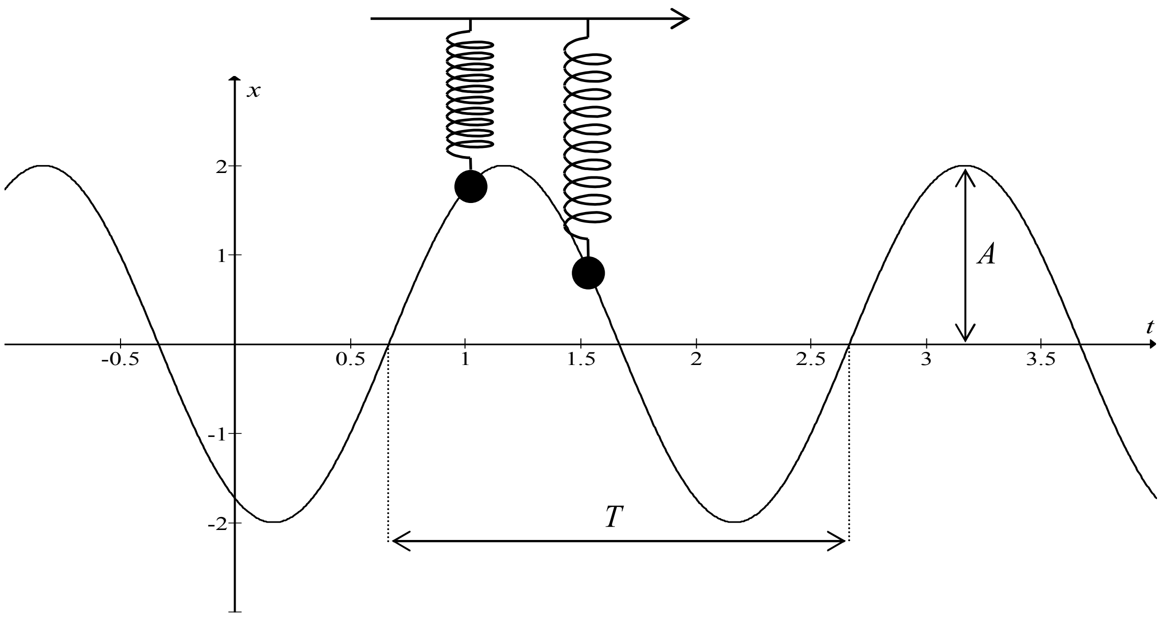
[53] Ako se izuzme dvojbeni fenomen levitiranja: to bi možda koji ambiciozniji fizičar mogao protumačiti kao akumuliranje tamne energije u tijelu. Nedavno je navodno poznati hrvatski fizičar iz Švicarske izjavio, otprilike, "da ga ne čudi što velečasni Sudac levitira, već ga čudi da i on sam to ne može" (Večernji list, 04. 02. 2010.), no iz teksta se ne vidi koje je maštovito fizikalno tumačenje imao na umu.

10 Harmoničko titranje

Harmoničko titranje (harmonija = sklad) je osobito značajan način titranja, budući da u prirodi ima mnogo primjera takvoga ili približno takvoga titranja, a drugačija titranja zgodno je matematički rastaviti na zbroj harmoničkih titraja.

10.1 Opis harmoničkog titranja

Harmoničko se titranje može definirati na više ekvivalentnih načina. Ovdje ćemo početi s definicijom koja opisuje kako to titranje izgleda, tj. kako se u vremenu odvija. U tu svrhu zamislimo elastičnu oprugu o koju je obješen manji uteg (Slika 10.1). Povučemo uteg, rastežući oprugu, pa ga pustimo: uteg na oprugi harmonički titra. Koja funkcija $x(t)$ opisuje položaj utega (u odnosu na ravnotežni položaj prije rastezanja)? Zamislimo da oprugu s utegom premještamo horizontalno konstantnom brzinom, pa horizontalni pravac postaje os t, na kojoj je pređeni put u jednoj sekundi označen kao vremenski interval od jedne sekunde. Ako bi se na utegu nalazila kreda, ona bi na vertikalnoj ploči uz koju uteg titra ispisala prikazanu krivulju koja se naziva sinusoidom.



Slika 10.1 Titranje elastične opruge

U prikazanom koordinatnom sustavu (t,x), sa ucrtanim jedinicama (sekunde na vremenskoj osi t, a npr. centimetri na osi tiranja x), jednadžba nacrtane sinusoide može se napisati (uz točnost od tri znameke) kao $x(t) = 2\sin(3{,}14t - 2{,}09)$. To je titranje s amplitudom $A = 2$ cm (najveći iznos otklona x od ravnotežnog položaja) i s periodom $T = 2$ s (najkraći vremenski interval nakon kojega se gibanje ponavlja), a štopericu smo uključili (tj. odabrali $t = 0$) jednu trećinu perioda prije nego što će uteg proći kroz ravnotežni položaj $x = 0$ gibajući se uvis.

Napisana jednadžba sinusoide prilično je nepregledna (neposredno se razabire samo iznos amplitude koji piše ispred funkcije sinus). Usto, istu sinusoidu u istom koordinatnom sustavu mogli smo zapisati i pomoću funkcije kosinus, ili pomoću kombinacije sinusa i kosinusa. Zato ćemo harmoničko titranje općenitije i preglednije definirati ovako:

Harmoničko titranje, kao funkcija vremena, opisano je sinusoidom.

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, ili
$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, ili
$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$.

gdje je: x – otklon od položaja ravnoteže
A – amplituda (najveći iznos otklona x),
$\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ – kružna frekvencija
φ_0 – fazni pomak

Podsjetimo se: funkcije sinus i kosinus poprimaju vrijednosti od -1 do 1, pa množenje s amplitudom mijenja taj raspon u $-A$ do A. Faktor ω omogućava proizvoljan izbor perioda T, jer bi bez njega funkcija $\sin t$ imala fiksni period $T = 2\pi \approx$ 6,28 s. Fazni pomak (ili početna faza) $\varphi_0 = \omega(\Delta t)_0$ pokazuje za koliki je vremenski interval Δt_0 (pozitivni u budućnost, a negativni u prošlost) pomaknuto ishodište vremena (trenutak $t = 0$ kada uključujemo štopericu) u odnosu na situaciju u kojoj bi sinusoida bila opisana samo sa $A\sin \omega t$ ili $A\cos \omega t$ (dok funkcija sinus prelazi u kosinus premještanjem ishodišta za $+T/4$).

Treća jednadžba iz gornjeg okvira, $x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$, može se dobiti npr. iz prve ako se na nju primjeni pravilo o sinusu sume: tada je $A_1 = A\cos\varphi_0$, dok je $A_2 = A\sin\varphi_0$. Taj je oblik zgodan u nekim primjenama, npr. kada se promatra brzina gibanja utega.

Uočite: x je složena funkcija vremena t (s periodom T); međufunkcija je argument sinusa ili kosinusa, $\omega t + \varphi_0$, bezdimenzionalna veličina (u "radijanima") koja se naziva faza i ima period 2π.

Faza harmoničkog titranjna može se interpretirati i kao kut zakreta $\varphi = \omega t + \varphi_0$ kod jednolikog gibanja po kružnici (Slika 5.2, u poglavlju o jednolikom kruženju). Dok se točka jednoliko giba po kružnici, njezina projekcija na promjer kružnice harmonički titra.

Kod harmoničkog titranja opruge, x opisuje produljenje/skraćenje opruge (te se često naziva elongacija). Kod harmoničkog titranja općenito, x opisuje otklon od ravnotežnog stanja u kojemu bi se sustav nalazio kada ne titra. Primjerice, u električnom titrajnom krugu (LC krug) to može biti količina naboja na jednoj ploči kondenzatora.

Sustav koji se može pobuditi na harmoničko titranje (ili upravo harmonički titra) naziva se harmoničkim oscilatorom. Za funkciju x kaže se još i da opisuje odziv sustava na vanjsku pobudu.

10.2 Diferencijalna jednadžba harmoničkog titranja

Umjesto da se opiše zadavanjem funkcije $x(t)$, harmoničko titranje može se definirati i pomoću zakona gibanja iz kojega bi se dobila takva funkcija. No, ne mora se odmah precizirati o kakvom se fizikalnom sustavu radi. Naime, znamo da drugi Newtonov aksiom, kao temeljni zakon gibanja u klasičnoj mehanici, sadrži drugu derivaciju funkcije položaja $x(t)$ po vremenu (tj. akceleraciju), pa ćemo funkciju položaja iz prethodnog poglavlja dva puta derivirati:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad / \; \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = A[\cos(\omega t + \varphi_0)]\omega = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad / \; \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A[\sin(\omega t + \varphi_0)]\omega = -\omega^2 \underbrace{A\sin(\omega t + \varphi_0)}_{x}$$

Uočimo da smo nakon drugog deriviranja funkcije $x(t)$ po vremenu ponovo dobili istu fukciju, pa zadnji redak možemo napisati kao:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

To je *diferencijalna jednadžba harmoničkog titranja*. Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe koje sadrže derivacije funkcija (pored, eventualno, i samih funkcija). Kaže se da je diferencijalna jednadžba onoga reda koji ima derivacija najvećeg reda u njoj. Dobivena relacija je diferencijalna jednadžba drugoga reda.

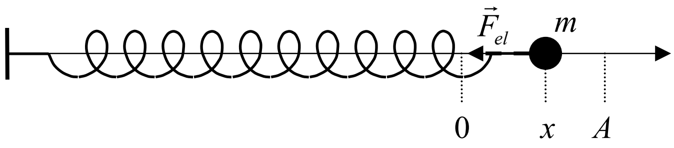
Ona tvrdi da funkcija x, koja opisuje harmoničko titranje, ima svojstvo da zbroj njezine druge derivacije po vremenu i same funkcije pomnožene nekom pozitivnom konstantom (ω^2) daje nulu.

U *Matematici II* ćete učiti kako se rješavaju diferencijalne jednadžbe. U ovom slučaju, naravno, znamo da je rješenje diferencijalne jednadžbe upravo ona sinusoida $x(t)$ od koje smo pošli u deriviranju (i drugi oblici jednadžbe sinusoide). I znamo da je pozitivna konstanta ω^2 kvadrat kružne frekvencije sinusoide.

Čemu, onda, uopće služi provedeni kratki račun? Odgovor je: dobili smo jednadžbu koja predstavlja još jednu od mogućih (ekvivalentnih) definicija harmoničkog titranja.

A ima i još jedan detalj: mi zapravo nismo dokazali da elastična opruga doista titra po sinusoidi. Tek sad je to lako učiniti, koristeći Hookov zakon koji kaže da se opruga (u području elastičnosti) produlji proporcionalno sili koja je rasteže, $F = k(\Delta l)$, gdje je Δl produljenje (skraćenje) opruge, dok je k konstanta opruge koja precizira koliko je npr. njutna potrebno za produljenje od 1 cm.

Titranje sustava (opruge s utegom) duž osi *x* provodi povratna elastična sila opruge F_{el} koja je, po zakonu akcije i reakcije, jednakog iznosa kao i sila kojom smo oprugu rastezali. Povratna sila ima samo *x*-komponentu, i ta je jednaka $F_{el_x} = -kx$, pri čemu



pozitivni x predstavlja produljenje opruge. (Skica namjerno prikazuje sustav kao da nema gravitacije jer težina, koja se podrazumijeva u prethodnom primjeru na Slici 10.1, ne utječe na titranje: ona je samo održavala dodatno rastezanje opruge, kojim je tamo uteg došao u početni položaj $x = 0$).

Uz aproksimaciju da je ukupna masa sustava sadržana u utegu (prema kojemu je masa opruge zanemariva), možemo napisati drugi Newtonov aksiom kao

$$F_{el_x} = ma_x$$

što, nakon uvrštavanja izraza za silu, te druge derivacije položaja za akceleraciju, daje

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dobiveni izraz je doista diferencijalna jednadžba harmoničkog titranja

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

jer je k/m pozitivna konstanta. Štoviše, ovaj oblik zakona gibanja za sustav opruge s utegom otkriva da je kružna frekvencija sinusoide

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(ili } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ , ili } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{),}$$

što znači da harmonički oscilator, prepušten sam sebi, uvijek titra samo jednom frekvencijom – koja se zove njegovom *svojstvenom* ili *vlastitom frekvencijom*, i ovisi samo o njegovoj građi (konstanta opruge i masa utega), a ne o vanjskoj pobudi (koliko smo oprugu rastegnuli).

To je svojstvo oscilatora važno i za razumijevanje *rezonancije*. Rezonancija je pojava da oscilator jako apsobira energiju titranja ako mu se dovodi u ritmu njegove vlastite frekvencije. Primjerice, na njihaljci (koja je približno harmonički oscilator za male kuteve otklona od vertikale), dijete mora mahati nogama u ritmu njezine svojstvene frekvencije da bi se njihalo sve jače. Sustavi koji mogu titrati ali nisu harmonički oscilatori često imaju veći broj različitih svojstvenih frekvencija.

Diferencijalnu jednažbu harmoničkog titranja upotrebit ćemo još za određivanje frekvencije električnog titrajnog kruga (naziva se još i LC krug, a satoji se od kondenzatora kapaciteta C i zavojnice induktiviteta L). Napon između ploča kondenzatora $U = \frac{q}{C}$ mora biti jednak naponu induciranom u zavojnici $U = -L\frac{di}{dt}$, pa je

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C}.$$

Budući da je jakost struje po definiciji $i = \frac{dq}{dt}$, uvrštavanje u gornji izraz daje:

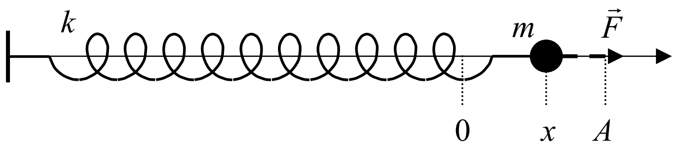
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

To je, očito, jednadžba harmoničkog titranja. Količina naboja na ploči kondenzatora mijenja se u vremenu po sinusoidi, a isto vijedi i za jakost struje u krugu i za gore spomenute napone, jer se dobijaju deriviranjem te sinusoide. Pritom je frekvencija titranja

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, odnosno $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (ili $T = 2\pi\sqrt{LC}$).

10.3 Energija harmoničkog titranja

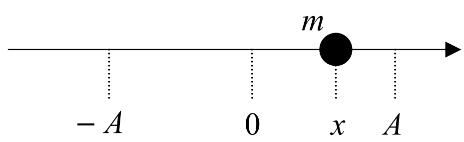
Energiju harmoničkog titranja ilustrirati ćemo na primjeru opruge s utegom. U odnosu na ravnotežno stanje prije početka titranja (uteg miruje u položaju $x = 0$), oscilator će dobiti onoliko energije koliki rad uložimo rastežući oprugu.



Oprugu rastežemo silom $F_x = kx$ na putu od $x = 0$ do $x = A$, pa je uloženi rad jednak

$$W_{ul} = \int_1^2 F\cos\alpha\, ds = \int_0^A kx\, dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^A = \frac{kA^2}{2}.$$

Uteg smo upravo dovukli do položaja A; u trenutku kada ga puštamo da titra, brzina mu je još uvijek nula, ukupna energija oscilatora je u obliku elastične potencijalne energije opruge. Potom uteg ubrzava prema ravnotežnom položaju i dobija kinetičku energiju, a potencijalna energija opruge se umanjuje s iznosa $\frac{kA^2}{2}$ na iznos



$\frac{kx^2}{2}$ u trenutku kad uteg prolazi kroj položaj x.

Zbog očuvanja ukupne količine energije E imamo:

$$\boxed{E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}}.$$

Maksimalnu brzinu uteg postiže kad prolazi kroz ravnotežni položaj, i kad se sva potencijalna energija pretvorila u kinetičku, pa je

$\frac{m{v_{\max}}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, tj. $v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$.

Brzina gibanja utega u tom je trenutku jednaka brzini zamišljenoga kružnoga gibanja čijom bi se projekcijom na promjer moglo dobiti harmoničko titranje, pa se ona mogla izračunati i kao $v = \omega r$ (dakako, radijus je jednak amplitudi, a ω mora biti jednako $\sqrt{k/m}$).

11 Literatura

1. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., *The Feynman lectures on physics I*, Addison-Wesley, London, 1975
2. Halliday D., Resnick R., *Fundamentals of Physics*, John Wiley, New York, 2003
3. Kittel C., Knight W. P., Ruderman M. A., *Mehanika*, Berkeley tečaj, I dio, Golden Marketig Tehnička knjiga, Zagreb, 2003
4. Kulišić P., *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 1996
5. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1976
6. Young H. D., Freedman R. A., *Sears and Zemansky University Physics*, Addison-Wesley, San Francisco, 2004

12 Indeks